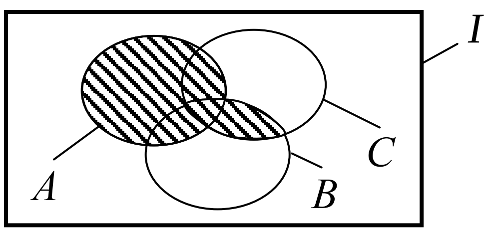
Ю. П. Шевелёв

СИМВОЛ-ИДС
Учебное пособие

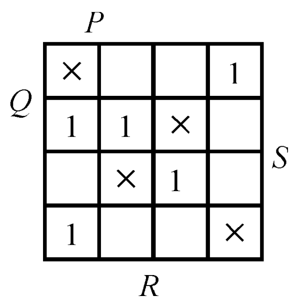
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Теория множеств
Булева алгебра



$R = A \cup B \cap C$



$f = \overline{R}\,\overline{S} + RS + PQS$

Томск 2003

Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Ю.П. Шевелёв

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Теория множеств
Булева алгебра

(Автоматизированная технология обучения «Символ»)

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению и специальности «Прикладная математика и информатика»

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов и преподавателей вузов

Томск 2003

УДК 512.563.3 (075)
ББК 22.1я73
Ш 37

Рецензенты:

Профессор кафедры защиты информации и криптографии Томского государственного университета, д-р техн. наук А. М. Оранов

Отдел информатизации образования Томского политехнического университета, зав. отделом канд. техн. наук Ю.В. Карякин

Шевелев Ю. П.
Ш 37 Дискретная математика. Ч. 1: Теория множеств. Булева алгебра (Автоматизированная технология обучения «Символ»): Учебное пособие. — Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. — 118 с.

Изложены основные сведения из теории множеств: алгебра множеств, бинарные отношения, бесконечные множества, теория нечётких множеств. Из булевой алгебры представлены разделы: минимизация булевых функций в дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных формах с учётом неопределенных состояний, булевы уравнения, первые сведения о булевом дифференциальном исчислении. Во второй части освещены темы: теория конечных автоматов — синтез логических (комбинационных) и многотактных схем, теорема Поста о функциональной полноте; комбинаторика — размещения, сочетания и перестановки с повторениями и без повторений, разбиение множеств и др.; теория графов — графы и ориентированные графы, сети, деревья и др., а также приведены контрольные работы по всему курсу дискретной математики. В первой части более 1500 упражнений, во второй — более 2000. Все упражнения закодированы, что обеспечивает возможность работы с пособием в режиме автоматизированного самоконтроля с применением устройств СИМВОЛ или их компьютерных аналогов (разработки Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники).

Для студентов технических специальностей вузов и техникумов, школьников старших классов общеобразовательных школ и для всех желающих самостоятельно пройти вводный курс прикладной дискретной математики.

УДК 512.563.3 (075)

ББК 22.1я 73

Набор С.Э. Астапенко
Верстка Ю.П. Шевелев

СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОЙ ЧАСТИ

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОЙ ЧАСТИ

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

КОМБИНАТОРИКА

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КРАТКО О СИСТЕМЕ «СИМВОЛ»

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что такое **дискретная математика**? Какими признаками характеризуются входящие в нее разделы? Хотя в целом границы, определяющие дискретную математику, в значительной степени являются условными, все же можно указать признак, позволяющий достаточно четко разделить всю современную математику на две составляющие. Суть этого признака заключена в самом названии «дискретная математика», где дискретность выступает как противоположность непрерывности, обозначающая отсутствие понятия предельного перехода. С этой точки зрения в дискретную математику могут быть включены такие разделы, как теория множеств, теория дискретных автоматов, математическая логика, теория графов и сетей, комбинаторика, векторная и матричная алгебры, теория чисел, теория конечных групп, колец и полей, теория алгебраических систем и многие другие. С позиций «чистой» математики среди этих разделов нет второстепенных. С прикладной же точки зрения не все разделы одинаково важны. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на подбор материала для учебного пособия, чтобы не слишком обременять студентов избыточной информацией, особенно на начальном этапе знакомства с элементами дискретной математики.

Данное пособие предназначено не для математиков, оно ориентировано на студентов, обучающихся в **технических** вузах и техникумах, в учебных программах которых предусмотрены предметы, связанные с электроникой, информатикой и вычислительной техникой. В связи с этим в пособие включены разделы дискретной математики, имеющие прямое отношение к электронике, вычислительной технике и информатике: теория множеств, булева алгебра логики, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов. Эти разделы отличаются наиболее яркой прикладной ориентацией. Их вполне можно рассматривать как общеобразовательные дисциплины, составляющие минимум, обязательный для каждого, кто впервые приступает к изучению основ дискретной математики с целью применения полученных сведений в своей практической деятельности.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть в основном является теоретической. В нее входит теория множеств и булева алгебра (алгебра логики). Теория множеств представлена как вводно-ознакомительный курс. Он рассчитан на 8 лекционных часов и 6–8 часов практических занятий. При самостоятельном изучении потребуется до 20 часов, если считать обязательным выполнение 25 % всех упражнений.

Наибольшее внимание в пособии уделено булевой алгебре — важнейшему разделу современной математики. Во-первых, булева алгебра является фундаментом всех без исключения информационных технологий. Во-вторых, с ее помощью решаются самые разнообразные логические задачи (о беспорядках, о расписании, о нахождении всех трансверсалей и др.). В третьих, она находит широчайшее применение в технических областях (логический синтез контактных структур, комбинационных и многотактных электронных схем, их минимизация, анализ работы и др.). Даже с чисто эстетической точки зрения ей нет равных: это самая «красивая» из всех наук современности.

В пособии булева алгебра представлена 10 главами. Некоторые из них по содержанию освещены достаточно полно, другие же являются лишь вводно-ознакомительными (подобно разделу «Теория множеств»), носящими пропедевтический характер (пропедевтика — введение в какую-либо науку, подготовительный курс. От греч. propaideuō — предварительно обучаю). К ним относятся такие темы, как «Булево дифференциальное исчисление», «Булевы уравнения», «Пороговые функции» и др. Предполагается, что на основе полученных сведений по той или иной теме студент в дальнейшем при необходимости сможет самостоятельно глубже изучить соответствующие вопросы, обратившись к специальной литературе. В очной системе образования на освоение всего раздела булевой алгебры следует планировать 14 часов лекций и 20 часов практических занятий. На самостоятельное изучение потребуется не менее 45 часов.

Необходимо отметить, что в литературе наряду с термином «булева алгебра логики» используются и синонимы, такие, как алгебра Буля [14; 16; 24], алгебра логики [4; 24; 50], алгебра событий [11], алгебра кнопок [24], алгебра исчисления высказываний [1], пропозициональная логика [24], булева алгебра [12, с. 8; 20, с. 21; 44; 50, с. 75; 51, с. 542, 575], логика предложений [9], математическая логика [13], бинарная булева алгебра [21], алгебра релейных цепей [23] и др. Не все эти термины являются полными синонимами (полные синонимы — вообще большая редкость). Однако с прикладной точки зрения различия между ними несущественны, поэтому практически любой из них можно взять за основу. При подготовке данного пособия начальным ориентиром послужили книги [12; 14; 20; 44], в которых используется термин «булева алгебра», в связи с чем этот термин принят и в данном пособии. Другие же авторы часто употребляют словосочетание «алгебра логики». Это можно объяснить тем, что с точки зрения «чистой» математики булевых алгебр, в наиболее общем случае определяемых как частично упорядоченные множества специального типа [24, с. 74], существует много и их интерпретация в виде алгебраической системы высказываний является лишь частным случаем. Однако термин «булева алгебра» также имеет право на существование, и его следует использовать хотя бы для того, чтобы во имя исторической справедливости не забывать, с чьим именем связан важнейший раздел математики, который по возможностям его практического применения не имеет себе равных среди других булевых алгебр.

Во второй части пособия значительное внимание уделено прикладным вопросам дискретной математики. Особенно это относится к разделу «Теория конечных автоматов», где на многих примерах показано применение булевой алгебры. На весь этот раздел достаточно 16 лекционных часов и 30 часов практических занятий. При самостоятельном его изучении потребуется около 60 часов, если выполнять 25 % всех упражнений.

Темы «Комбинаторика» и «Теория графов» представлены в пособии в небольшом объеме. Они могут быть освоены студентами за 8 лекционных часов и 16 часов практических занятий. На самостоятельное их изучение необходимо не менее 30 часов.

Таким образом, материал обеих частей данного пособия может быть освоен за 120 часов аудиторных занятий. Из них 46 часов — лекции и 74 часа — практические занятия, но при условии, что выполняется хотя бы 25 % всех упражнений. Если число обязательных упражнений сократить до 10 %, то на практические занятия вместо 74 достаточно 45 часов. При самостоятельном изучении пособия необходимо не менее 160 часов.

В пособии более 3500 упражнений. Большинство из них просты, и для их выполнения достаточно ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом.

Ни к одному из упражнений ответы в открытом виде не приведены. Вместо них указаны специальные коды, внешне не несущие никакой информации об ответах. При использовании пособия в традиционной (бескомпьютерной) системе обучения на коды можно не обращать внимания. Иное дело, если воспользоваться устройством «Символ» либо его компьютерным аналогом (устройство «Символ» и компьютер входят в состав технических средств информационно-дидактической системы (ИДС) «Символ», разработанной лабораторией ИДС кафедры высшей математики ТУСУРа). В этом случае студент может работать над упражнениями в режиме самоконтроля, совершенно не нуждаясь в услугах преподавателя. Исключение составляют только девять упражнений подраздела 3.10 теории множеств, где предлагается разобраться в парадоксах, т. е. рассуждениях, приводящих к утверждениям, противоречащим доказанным теоремам и здравому смыслу. Эти упражнения не содержат ни кодов, ни открытых ответов, следовательно, рассуждения студентов могут быть оценены только на уровне неформального внешнего контроля.

Благодаря большому числу кодированных упражнений, содержащихся в пособии, создаются благоприятные условия для организации самостоятельной работы студентов в системе дистанционного образования. При этом кодированные упражнения могут быть использованы не только на этапе самоподготовки, но и для проведения контрольных работ, а также на зачетах и экзаменах. При формировании контрольных заданий преподаватель может либо выбирать упражнения из данного пособия, либо разрабатывать свои и самостоятельно их кодиро-вать. Операции кодирования в системе «Символ» автоматизированы. При отсутствии компьютера кодировать можно и вручную с применением специализированных устройств. (Краткие сведения о системе «Символ» приведены в конце второй части данного пособия.)

По всем разделам дискретной математики существует обширная литература. В основном это монографии, журнальные статьи и учебные пособия. И монографии, и журнальные статьи не могут быть рекомендованы студентам технических вузов, особенно при первом знакомстве с основами тех или иных направлений дискретной математики, поскольку они предназначены в основном для математиков-профессионалов. Существующие учебные пособия (например, [14; 27; 33; 46; 47]), написаны не так академично, как журнальные статьи и монографии, то есть в гораздо более доступном изложении, но все же надо отметить, что их авторы больше ориентируются на студентов университетов, изучающих математику как свою будущую специальность, чем на студентов технических вузов, для которых математика — инструмент для практической деятельности.

Кроме учебных пособий, существуют научно-популярные издания, например [6; 36; 52]. В большинстве случаев они не содержат сведений, необходимых инженеру в его практической работе. По ним невозможно изучить какой-либо раздел математики. Но это не значит, что читать их бесполезно. Даже сложные понятия (типа простой импликанты в булевой алгебре или функционально полной системы в теории комбинационных схем), если они описаны достаточно популярно, легко воспринимаются при чтении, после чего без особого труда узнаются при изучении специальных изданий.

При подготовке данного пособия автор стремился в основном к доступному изложению материала (за счет определенного снижения строгости), чтобы его с малыми затратами труда и времени могли освоить как студенты технических вузов, так и школьники старших классов общеобразовательных школ, и вообще каждый, кто изъявит желание ознакомиться с вводными поняти-ями представленных в данном пособии разделов диск-ретной математики.

Пособие написано в соответствии с программой подготовки и выпуска учебных пособий, разработанной кафедрой высшей математики ТУСУРа. Программа охватывает все традиционные разделы курса высшей математики для технических вузов, а также наиболее важные в прикладном отношении темы дискретной математики.

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой высшей математики ТУСУРа профессору Леониду Иосифовичу Магазинникову за активное содействие в работе над пособием на всех ее этапах — от замысла до опубликования; заведующему СКБ «Импульс», канд. техн. наук, доценту каф. промышленной электроники ТУСУРа Михаилу Юрьевичу Шевелеву, проверившему решения и коды большей части задач пособия и разработавшему систему автоматического кодирования заданий, применение которой позволило многократно сократить трудозатраты на кодирование упражнений (по сравнению с устройством «Символ»); рецензенту доктору технических наук, профессору кафедры защиты информации и криптографии Томского государственного университета Александру Михайловичу Оранову, внимательно прочитавшему рукопись и высказавшему ряд существенных замечаний, что во многом способствовало улучшению содержания пособия, и рецензенту заведующему отделом информатизации образования Томского политехнического университета канд. техн. наук Юрию Васильевичу Карякину, рассмотревшему пособие с позиций автоматизации самоконтроля и внесшему ряд рекомендаций по его представлению в виде компьютерного учебника. Кроме того, автор благодарит редактора издательства ТУСУРа Любовь Ивановну Кирпиченко, благодаря усилиям которой пособие оформлено в соответствии с современными требованиями к изданию учебной литературы.

ТУСУР, лаб. ИДС кафедры высшей математики.
634050, г. Томск, просп. Ленина, 40.
Телефон (382-2) 53-32-60.

Автор

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

ВВЕДЕНИЕ

Теория множеств в данном пособии представлена четырьмя разделами. Это алгебра множеств, бинарные отношения, бесконечные множества и элементы теории нечётких множеств. Каждый из четырёх разделов разбит на подразделы. В конце подразделов приведены упражнения. Выполнять их рекомендуется все. Наилучшие результаты достигаются с применением устройств «Символ» (либо их компьютерных аналогов), оценивающих каждый ответ в системе «правильно-неправильно», поскольку при этом всякие подсказки исключены и учащийся все упражнения выполняет с максимальной самостоятельностью, обращаясь к преподавателю лишь в случае, когда устройство все ответы признает неправильными.

При самоконтроле с применением устройства «Символ» (или компьютера) необходимо пользоваться следующей инструкцией:

1) включить устройство, нажать кнопку СБРОС;

2) посимвольно набрать код задания. Он указан в круглых скобках перед условием упражнения;

3) посимвольно набрать ответ;

4) нажать кнопку КОНТРОЛЬ. Если загорится индикатор ПРАВИЛЬНО, ответ признаётся верным. Если же загорится индикатор НЕПРАВИЛЬНО, ответ является неверным.

Кроме того, необходимо учитывать следующие требования:

1) если ответ состоит из последовательности нескольких чисел (или букв), то при их вводе в устройство никакие знаки, отделяющие одно число от другого, не используются (ни пробелы, ни запятые, ни точки, ни точки с запятой). Например:

> (ЕК2). Укажите элементы множества
> $$A=\{x \,/\, 7 \le x < 15,\ x \text{ — простое число}\}.$$

Ответом является последовательность чисел 7, 11, 13. В устройство вводим: ЕК271113, где ЕК2 — код задания, 71113 — ответ. Числа, образующие ответ, вводятся всегда в порядке возрастания, без использования запятых (а в случае букв — в алфавитном порядке);

2) в конце условий некоторых упражнений стоит пометка (лат.). Она напоминает о том, что ответ необходимо вводить в латинском алфавите;

3) ответ может быть представлен в виде какой-либо формулы:

> Упростить выражения (лат.):
> (АНО). $A\cap B\cap\overline{C}\ \cup\ A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\ldots$
> (УМП). $B\cap C\cup A\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap C=\ldots$

В первом упражнении ответ имеет вид $A\cap\overline{C}$, во втором — $A\cup C$. (Здесь и в дальнейшем упрощение осуществляется до предела.) В обоих случаях ответы набираются посимвольно за исключением того, что знак пересечения не вводится. При самоконтроле по первому упражнению набираем: АНО $A–C$, где АНО — код задания, $A–C$ — ответ, набираемый в латинском алфавите. Черточка перед буквой C обозначает знак дополнения. Он набирается перед буквой. При проверке второго ответа в устройство вводим: УМП$A\cup C$, где УМП — код задания, $A\cup C$ — ответ, набираемый также в латинском алфавите. Буквы, входящие в формулы, вводятся в алфавитном порядке. Между буквами необходимо вставить знак объединения;

4) в некоторых упражнениях после кода задания стоит знак «!» (восклицательный). Он напоминает о том, что под кодом задания представлено более одного вопроса и что при самоконтроле сначала вводится код задания, а затем — ответы на все вопросы по порядку их следования. При этом ответы не отделяются один от другого ни запятыми, ни точками, ни точками с запятой. Кнопку КОНТРОЛЬ можно нажимать только после ввода всех ответов на вопросы задания. Если загорится индикатор НЕПРАВИЛЬНО, то это значит, что среди ответов есть, по меньшей мере, одна ошибка. Где находится эта ошибка, устройство не сообщает. Ее надо найти самостоятельно. Рассмотрим пример:

> (ЯКИ)! Найдите:
> а) число элементов булеана множества
> $$A = \{a, b, c, d, e, f\};$$
> б) число несобственных подмножеств множества A;
> в) число двухэлементных подмножеств множества A.

Здесь под одним кодом представлено три упражнения, ответы к которым имеют вид: 64 — на первый вопрос, 2 — на второй и 15 — на третий. При самоконтроле в устройство вводим ЯКИ64215, где ЯКИ — код задания, 64215 — ответы на все три вопроса;

5) ответами могут быть одно или несколько чисел, представленных в виде десятичных дробей. Все такие ответы набираются посимвольно с использованием запятой, отделяющей целую часть числа от дробной, но между числами никакие разделительные знаки не ставятся. Например:

> (ПАФ). Укажите степени принадлежности каждого элемента нечеткого множества $\widetilde{A}$, если
> $$\widetilde{A}=\{(0{,}45/2),(0{,}9/3)\}$$
> и если базовое множество имеет вид
> $$M=\{1, 2, 3\}.$$

Ответом являются числа: 1; 0,55; 0,1. В устройство вводим: ПАФ10,550,1, где ПАФ — код задания, все остальное — ответ.

Перечисленные требования, которые необходимо соблюдать при вводе ответов в устройство «Символ», являются основными. Существуют и другие требования, но все они достаточно просты, понятны из условий задач, поэтому рассматривать их нет необходимости.

1. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

1.1. Множества

Основные положения теории множеств впервые были разработаны чешским философом, математиком и логиком, профессором теологии (г. Прага) Бернардом Больцано (1781—1848), немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831—1916) и немецким математиком, профессором (с 1872 г.) Галльского университета Георгом Кантором (1845—1918). Г. Кантор внес в теорию множеств (особенно бесконечных) наибольший вклад, поэтому теория множеств тесно связана с его именем. Официально теория множеств была признана в 1897 г., когда Ж. Адамар (1865—1963) и Гурвиц на Первом международном конгрессе математиков в своих докладах привели многочисленные примеры применения теории множеств в различных разделах математики [14, с. 46].

Понятию множества невозможно дать точное определение, поскольку оно является первичным, предельно широким по содержанию. Его можно лишь пояснить. О том, какой смысл вкладывал в это понятие сам Георг Кантор, можно получить представление из следующих цитат, авторы которых ссылаются на Г. Кантора:

«Под *множеством* понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью» [14, с. 6];

«Под *множеством S* будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое» [33, с. 5];

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое целое» [6, с. 21] и т. д.

Теория множеств — это раздел математики, в котором изучаются общие свойства конечных и бесконечных (в основном бесконечных) множеств.

Главным в теории множеств является вопрос о том, как определить множество, т. е. указать способ, при помощи которого можно было бы однозначно установить, принадлежит ли данный объект заданному множеству или не принадлежит.

Объекты, из которых состоят множества, называются их **элементами**. Принадлежность элемента a множеству P записывают так:

$$a \in P,$$

где $\in$ — **знак принадлежности**. Он представляет собой видоизмененную букву ε греческого алфавита, с которой начинается слово εστι, по-русски обозначающее «есть» [24, с. 355].

Читается запись следующим образом: «a есть элемент множества P», либо «a является элементом множества P», либо «элемент a принадлежит множеству P».

При необходимости указать несколько элементов, принадлежащих множеству P, все их перечисляют перед знаком $\in$. Например, запись $a, b, c \in P$ говорит о том, что

$$a \in P, \quad \text{и} \quad b \in P, \quad \text{и} \quad c \in P.$$

Если же элемент a не принадлежит множеству P, то пишут:

$$a \notin P.$$

Если множеству P не принадлежит несколько элементов, например, a, b, c, то записывают:

$$a, b, c \notin P.$$

Множество может содержать любое число элементов, **конечное** и **бесконечное**. Множество может содержать один элемент и не содержать ни одного. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** множеством и обозначается символом $\varnothing$. Множество, содержащее один элемент, называется **синглетоном** [24, с. 542] (от англ. *single* — одиночный).

Задают множества двумя основными способами:

а) путем прямого перечисления его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки и отделяются один от другого запятыми. Например, запись

$$P = \{a, b, c, d\}$$

говорит о том, что множество P состоит из четырех элементов a, b, c, d;

б) при помощи специально сформулированного правила, или свойства, в соответствии с которым всякий объект либо входит в множество, либо не входит (интуитивный принцип абстракции [33, с. 6]). В [33] такое правило называют формой $P(x)$. Множество, задаваемое формой $P(x)$, имеет вид

$$A = \{x \,/\, P(x)\}.$$

Например, множество десятичных цифр можно задать следующим образом:

$$P = \{x \,/\, 0 \le x \le 9 \wedge x \text{ — целое число}\},$$

где слева от наклонной черты записана переменная x, а справа — правило (форма $P(x)$, согласно [33]), указывающее, какие значения x образуют элементы, принадлежащие множеству P, и какие не образуют. Читается запись так: «множество P — это все те значения x, которые больше нуля или равны ему, но меньше или равны девяти и являются целыми числами». Знак $\wedge$ обозначает союз И. Вместо него можно ставить знак &, который также обозначает союз И:

$$P = \{ x \,/\, 0 \le x \le 9 \;\&\; x \text{ — целое число}\}. \qquad (1)$$

Допускается и такая запись, где вместо логических знаков $\wedge$ и & ставится запятая либо точка с запятой:

$$P = \{ x \,/\, 0 \le x \le 9,\, x \text{ — целое число}\}.$$

$$P = \{ x \,/\, 0 \le x \le 9;\, x \text{ — целое число}\}.$$

При этом необходимо помнить, что и запятая, и точка с запятой заменяют союз И.

Вместо наклонной черты, отделяющей переменную x от формы $P(x)$, в литературе встречается и прямая черта [3; 24; 33]:

$$P = \{ x \mid 0 \le x \le 9,\, x \text{ — целое число}\},$$

а также точка [39, с. 205]:

$$P = \{x \cdot P(x)\}.$$

Буква x в записи множества сама по себе не является элементом множества P. Она представляет собой переменную, которая может принимать различные значения из некоторой области. В случае выражения (1) вместо переменной x можно подставлять любые числа. Но из них в множество P войдут лишь десять чисел: 0, 1, 2, …, 9. Число 10 в множество P не входит, поскольку оно не удовлетворяет свойству $x \le 9$. Не войдет в множество P и число 3,5, так как в P могут входить лишь целые числа.

Множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов (интуитивный принцип объемности [33, с. 5]). Например:

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}.$$

Элементы этих множеств записаны в различных последовательностях, но наборы элементов совпадают, поэтому множества равны, так как **порядок** записи элементов, образующих множество, **не имеет значения**.

Равными могут быть также множества, заданные различными способами. Например:

$P = \{x\ /\ 0 < x < 10,\ x$ — простое число$\}$,

$Q = \{2, 3, 5, 7\}$.

Здесь множество P образуют все значения x, меньшие 10 и входящие в множество простых чисел. Это числа 2, 3, 5, 7. Множество Q образуют те же простые числа, но указанные прямым перечислением. Следовательно, $P = Q$.

В некоторых случаях, когда множества задаются прямым перечислением, для того чтобы выяснить, равны ли множества, необходимо уточнять понятие равенства элементов. Например: являются ли равными следующие множества:

$$P = \left\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\right\};$$

$$Q = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256}\right\}?$$

Эти множества не равны, поскольку по форме представления их элементы не совпадают. Но эти множества будут равными, если считать, что их элементы представляют собой натуральные десятичные числа, заданные с использованием математических операций. Достаточно выполнить эти операции, и мы в обоих случаях получим одно и то же множество $\{1, 4, 9, 16\}$, откуда и следует, что $P = Q$.

Для обозначения множеств в общем случае можно использовать любые знаки, но в основном их обозначают прописными буквами латинского алфавита.

Всякое множество характеризуется величиной, которую называют (по Г. Кантору) **кардинальным числом**, показывающим, сколько элементов содержит множество. Для обозначения числа элементов множества часто используют две вертикальные черты, между которыми записывается само множество или его обозначение.

Например, если $P = \{a, b, c\}$, то его кардинальное число равно: $|P| = |\{a,b,c\}| = 3$.

Множества с одинаковыми кардинальными числами называются **эквивалентными**.

Для записи числа элементов множества A используют и другие обозначения. Например, в [17, с. 11] читаем: «Будем обозначать через $N(A)$ количество элементов множества A».

Завершим данный подраздел замечанием о **повторяемости** элементов в множестве. Могут ли в множество входить одни и те же элементы более одного раза? Нет, не могут. Все элементы множества должны отличаться один от другого, поэтому **каждый элемент может входить в множество только один раз**. Тогда возникает вопрос, можно ли считать множеством, например, следующее:

$$P = \{1, 1, 2\}?$$

Это множество, но состоящее не из трех элементов, а только из двух, т. е.

$$P = \{1, 1, 2\} = \{1, 2\},$$

и его кардинальное число равно двум. Таким образом, в записи множества некоторые элементы, в принципе, могут быть указаны многократно, но учитываться они должны только по одному разу.

В тех случаях, когда требуется показать, что те или иные элементы входят в множество неоднократно, следует применять термин «семейство» и вместо фигурных скобок использовать круглые скобки.

Упражнения

1. (ВХМ). Пусть A — множество простых чисел. Укажите номера верных записей:

1) $1 \in A$; 2) $2 \in A$; 3) $0 \in A$; 4) $19 \in A$; 5) $23 \in A$.

2. (ШИВ)! Сколько элементов в множествах:

а) $\{a, b, c, aa, bc\}$; г) $\{111, 22, 2, 33\}$;
б) $\{a, b, c, a, b, c\}$; д) $\{11, 22, 11, 12\}$;
в) $\{1, 2, 3, 123, 12\}$; е) $\{1, 11, 111, 1\}$?

3. (ТИ.ШК). Известно, что $a, b, c \in Q$. Кроме того, известно, что $1, 5, 7 \in Q$. Других элементов в множестве Q нет. Перечислите все элементы множества Q.

4. (Ш6.Ш6). Укажите все элементы множества, составленного из букв слова ЭЛЕМЕНТ.

5. (30.56). Укажите все элементы множества, составленного из всех цифр десятичного числа 1274327.

6. (500). Элементами множества $S = \{P, Q, R\}$ являются: $P = \{a, b, c\}$; $Q = \{1, 2, 3\}$; $R = \{11, 12, 13\}$.

Укажите верные записи:

а) $P \in S$; г) $11 \notin S$;
б) $a \in S$; д) $\{1, 2, 3\} \in S$;
в) $\{a, b, c\} \in \{P, Q, R\}$; е) $\{P, Q\} \in S$.

7. Укажите (ВР8) пустые множества, (ФТО) синглетоны:

а) $\{x\ /\ x \geq 1 \wedge x \leq 0\}$; г) $\{x\ /\ x > 2 \wedge x = 5\}$;
б) $\{x\ /\ x > 0 \wedge x = 0\}$; д) $\{x\ /\ x < 0 \wedge x = 1\}$;
в) $\{\varnothing\}$; е) $\{x\ /\ x \geq 0 \wedge x = 1\}$.

8. Укажите (ВЗН) пустые множества., (25П) синглетоны:

а) $B = \varnothing$;

б) $B = \{x\ /\ x = n^2 + 2n - (n+1)^2 + 1,\ n$ — целое число$\}$;

в) $B = \{x\ /\ x = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{(n-1)^2},\quad n$ — целое число, $n > 1$, $1 \notin B\}$;

г) $B = \{\varnothing\}$;

д) $B = \{0\}$;

е) $B = \{x\ /\ x = 2n + 1 \wedge\ x$ — четное число, n — целое число$\}$.

9. (РУС)! Найдите кардинальные числа каждого из множеств, указанных в предыдущем упражнении.

10. Найдите кардинальные числа множеств.

(021). $P = \{x\ /\ x < 10,\ x$ — натуральное число$\}$.

(ЭШУ)! $P = \varnothing$; $P = \{0, \varnothing\}$; $P = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 0\}$.

(8Д4). $P = \{x\ /\ x$ — целое число (положительное, или отрицательное, или нуль), $|x| < 8\}$.

11. Укажите элементы множеств.

(АК.5К). $P = \{x\ /\ x \in \{a, b, c\}\}$.

(68.56). $P = \{x\ /\ x > 4 \wedge x \in \{3, 4, 5, 7, 8\}\}$.

(ЦУ.56). $P = \{x\ /\ x$ — натуральное число, $x \leq 3\}$.

12. (УЖИ). Укажите верные равенства:

а) $\{\{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$;

б) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$;

в) $\{0\} = \{x\,/\,x$ — целое неотрицательное число $\wedge\ x$ — ненатуральное число$\}$;

г) $\{1, 2, 3, 5, 7\} = \{x \in A\,/\,x < 10 \wedge A$ — множество простых чисел$\}$;

д) $\{0, 2, 4, 6, 8\} = \{x\,/\,x < 9,\ x$ — неотрицательное четное число$\}$;

е) $\{2,4\} = \{x\,/\,x$ — решение уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0\}$.

13. (МО.ШК). Укажите элементы множества:

$P = \{x\,/\,x$ — название месяца, которое начинается с буквы М$\}$.

14. (ЦВК). Укажите множества, равные множеству $\{2, 4, 6, 8\}$:

а) $P = \{x\,/\,x = 2n,\ n$ — натуральное число $\wedge\ n < 5\}$;

б) $P = \{x\,/\,x = 2n,\ n$ — неотрицательное целое число $\wedge\ n < 5\}$;

в) $P = \{x\,/\,x = 2n + 2,\ n$ — неотрицательное целое число $\wedge\ n < 5\}$;

г) $P = \{x\,/\,x = 2(n + 1),\ n$ — неотрицательное целое число $\wedge\ n \le 3\}$;

д) $P = \{x\,/\,x = 2n + 2,\ n$ — натуральное число $\wedge\ n < 5\}$;

е) $P = \{x\,/\,x = 2n + 2,\ n$ — неотрицательное целое число $\wedge\ n < 4\}$.

15. (580). Укажите множества с кардинальным числом 5:

а) $Q = \{x\,/\,x$ — целое число $\wedge\ |x| \le 2\}$;

б) $Q = \{x\,/\,x$ — целое неотрицательное число $\wedge\ x < 6\}$;

в) $Q = \{x\,/\,x = 3n,\ n$ — целое число $\wedge\ |n| < 3\}$;

г) $Q = \{x\,/\,x = n^2,\ n$ — целое неотрицательное число $\wedge$ $\wedge\ n \le 4\}$;

д) $Q = \{x\,/\,x = n^2,\ n$ — натуральное число $\wedge\ n \le 4\}$;

е) $Q = \{x\,/\,x = n^3 - 1,\ n$ — натуральное число $\wedge\ 6 \le n \le 10\}$;

ж) $Q = \{x\,/\,x = n^2,\ n$ — целое число $\wedge\ |n| \le 3\}$.

1.2. Подмножества

Множество B называется **подмножеством** множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A.

Будем различать следующие две записи:

$$B \subseteq A \text{ и } B \subset A,$$

где символы $\subseteq$ и $\subset$ представляют собой знаки **включения**. Запись $B \subseteq A$ читается так: «множество B включено в множество A, причем множество A является подмножеством самого себя». Запись $B \subset A$ говорит о том, что все элементы множества B входят в множество A, но само множество A не является своим подмножеством. Здесь просматривается аналогия со знаками < и $\le$, где знак < обозначает строгое неравенство, в то время как знак $\le$ допускает и равенство чисел. (Некоторые авторы не различают знаки $\subseteq$ и $\subset$. Например, в [14, с. 6] используется только знак $\subset$ независимо от того, является ли множество своим подмножеством или не является.)

Выясним, сколько всего существует подмножеств данного множества. Запишем элементы заданного множества P в каком-либо порядке и каждому элементу поставим в соответствие двоичный разряд (о двоичных числах см. подраздел 1.1 раздела «Булева алгебра»). Пусть 0 (нуль) обозначает, что соответствующий элемент отсутствует в подмножестве, а 1 — что этот элемент входит в подмножество. Тогда каждому $|P|$-разрядному двоичному числу будет соответствовать определенное подмножество. Известно, что всего существует $2^{|P|}$ $|P|$-разрядных двоичных чисел. Следовательно, число всех подмножеств также равно $2^{|P|}$. Проиллюстрируем это на примере множества $P = \{a, b, c\}$.

В табл. 1 указаны элементы a, b, c, и под каждым элементом записаны двоичные цифры. В левой колонке приведены десятичные эквиваленты двоичных трехразрядных чисел. В правой части таблицы перечислены сами подмножества. В верхней строке под элементами a, b, c записаны нули. Это значит, что в подмножество с нулевым номером не входит ни один элемент множества P. Следовательно, получаем пустое подмножество.

Таблица 1

№	$a\ b\ c$	Подмножества	
0	0 0 0	$\varnothing$	Несобственное подмножество
1	0 0 1	$\{c\}$	Собственные подмножества
2	0 1 0	$\{b\}$	
3	0 1 1	$\{b, c\}$	
4	1 0 0	$\{a\}$	
5	1 0 1	$\{a, c\}$	
6	1 1 0	$\{a, b\}$	
7	1 1 1	$\{a, b, c\}$	Несобственное подмножество

Заметим, что при табличном представлении подмножеств в таблице всегда будет присутствовать строка с номером 0 (нуль), которой соответствует $|P|$-разрядное двоичное число, состоящее из $|P|$ нулей. Следовательно, **пустое множество является подмножеством любого множества**.

В строке с номером 1 под элементом c записана единица. Это значит, что в подмножество с номером 1 входит элемент c, и подмножество имеет вид $\{c\}$. В строке с номером 2 единица соответствует элементу b, следовательно, подмножество номер 2 имеет вид $\{b\}$, и т. д. до последней строки, где нет нулей, что соответствует случаю, когда в подмножество входят все элементы множества P. Такое подмножество совпадает с множеством P.

Таким образом, рассмотренный прием позволяет не только найти все подмножества, но и пронумеровать их.

Подмножества бывают двух видов: **собственные** и **несобственные**. Само множество P и пустое множество называются несобственными подмножествами. Все остальные подмножества называются собственными. Следовательно, всякое непустое множество P содержит два несобственных подмножества и $2^{|P|} - 2$ собственных подмножеств. Согласно табл. 1 несобственные подмножества имеют вид $\varnothing$ и $\{a, b, c\}$, все остальные шесть подмножеств являются собственными. (Американский логик и математик Стефан Коул Клини (род. в 1909 г.) множество P называет неистинным подмножеством множества P, а все остальные подмножества — истинными [24, с. 449].)

Множество всех подмножеств множества P называют **булеаном** этого множества P [14, с. 7; 24, с. 74] и обозначают $B(P)$. Булеан множества $P = \{a, b, c\}$ имеет вид

$$B(P) = \{\varnothing, \{c\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}.$$

Кардинальное число любого собственного подмножества множества P меньше $|P|$. Чтобы убедиться в этом, поставим в соответствие каждому элементу множества P двоичный разряд, как показано в табл. 1. Среди всех $|P|$-разрядных двоичных чисел существует только одно число, не содержащее нулей. Ему соответствует несобственное подмножество, совпадающее с множеством P. Удалим это число. В каждом из оставшихся $|P|$-разрядных чисел содержится хотя бы один нуль, показывающий, какой элемент множества P не входит в соответствующее подмножество. А это значит, что в каждом из собственных подмножеств число элементов меньше, чем $|P|$.

Упражнения

1. (ШСС). Сколько одноэлементных подмножеств содержится в множестве вида $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Дано множество вида $A = \{a, b, c, d\}$. Укажите верные записи:

(ОАП).	(БЫР).
а) $a \in A$;	а) $\{a\} \subset \{a, b\}$;
б) $d \subset A$;	б) $\{c\} \subseteq \{c\}$;
в) $\varnothing \in A$;	в) $\varnothing \in \{a, b, c\}$;
г) $\{a, b, c, d\} \subseteq A$;	г) $\varnothing \subset \{a\}$;
д) $\varnothing \subset A$;	д) $A \subseteq \{a, b, c, d\}$;
е) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.	е) $a, b \subseteq \{a, b\}$.

3. (ЗОМ). Сколько собственных подмножеств имеет множество

$M = \{x\,/\,x$ — натуральное число $\wedge\, x < 6\}$?

4. (НА). Известно, что число собственных подмножеств некоторого множества K равно числу его несобственных подмножеств. Найдите $|K|$ и кардинальное число булеана множества K.

5. (800). В множестве R отсутствуют собственные подмножества. Определите кардинальное число множества R и кардинальное число булеана множества R.

6. (ШТК). Известно, что число собственных подмножеств некоторого множества в 15 раз больше числа его несобственных подмножеств. Найдите кардинальное число этого множества.

7. (ТТЮ). Некоторое множество имеет 62 собственных подмножества. Найдите число элементов булеана этого множества.

8. (ЗМА). Некоторое множество содержит пять одноэлементных подмножеств. Найдите кардинальное число булеана этого множества.

9. (ББХ). Кардинальное число множества S равно 7. Найдите число собственных подмножеств множества S.

10. (ТУФ). Булеан некоторого множества P содержит 256 элементов. Найдите число собственных подмножеств множества P.

11. (5П7). Булеан множества P состоит из 128 элементов. Найдите кардинальное число множества P.

12. (23У). Дано множество P. Когда из него удалили три элемента, получилось множество, булеан которого содержит 64 элемента. Найдите $|B(P)|$.

13. (454). Булеан множества M имеет 16 элементов. В множество M добавили несколько элементов. Получилось новое множество P, для которого $|B(P)| = 1024$. Найдите разность $|P| - |M|$.

14. (ШЛШ). Множество P имеет 56 собственных подмножеств, среди которых нет ни одного одноэлементного подмножества. Найдите $|B(P)|$.

15. (ТШХ). Множество P имеет 27 подмножеств, среди которых нет ни одного одноэлементного подмножества. В множество P добавили два элемента. Получилось множество M. Найдите $|B(M)|$.

16. (РА)! Дано множество $S = \{a, b, 1, 2, 3, 4\}$. Сколько существует подмножеств этого множества, не содер-жащих букв? Сколько существует подмножеств, не со-держащих цифр? Сколько существует подмножеств, не содержащих ни букв, ни цифр?

17. (ЯТН)! Сколько собственных подмножеств имеет синглетон? Сколько несобственных подмножеств имеет синглетон?

1.3. Диаграммы Венна. Универсальное множество

Венн Джон (1834—1923) — английский логик, профессор, член Королевского общества [24, с. 82].

Чтобы повысить наглядность представления множеств и отношений между ними, используют **диаграммы Венна** (иногда их называют диаграммами Эйлера [14], кругами Эйлера [16], диаграммами Эйлера-Венна [46]) в виде замкнутых кривых, ограничивающих области, которым ставятся в соответствие элементы тех или иных множеств. На рис. 1 показаны два множества:

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$K = \{1, 2, 3\}$.

Непосредственно из диаграммы видно, что $K \subset P$.

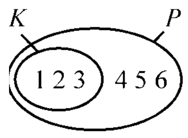


Рис. 1

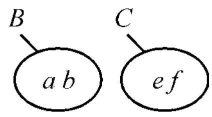


Рис. 2

Если требуется показать, что множества не имеют общих элементов, эти множества изображают непересекающимися кругами. На рис. 2 непересекающимися являются множества

$B = \{a, b\}$; $C = \{e, f\}$.

Одним из важнейших понятий теории множеств является понятие **универсального** множества (иногда исполь-зуется термин «полное множество» [24, с. 454], а также «универсум» [14, с. 7]). Обозначается оно обычно симво-лом I (либо U). Множество I — это множество всех тех элементов, которые участвуют в данном рассуждении. Любое рассматриваемое при этом множество является подмножеством универсального множества. Например, если рассматриваются различные множества целых положительных чисел за исключением нуля, то универ-сальным можно считать множество всех натуральных чисел.

На диаграммах Венна универсальные множества изображаются в виде прямоугольников, внутри которых размещаются круги, обозначающие подмножества соответствующих универсальных множеств. На рис. 3 показан пример универсального множества

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

и двух его подмножеств $P = \{2\}$ и $Q = \{2, 3, 5, 7\}$, где P — множество четных простых чисел, а Q — множество всех простых чисел, меньших 10.

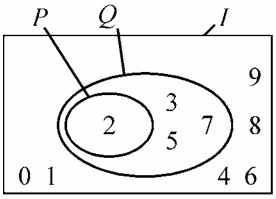


Рис. 3

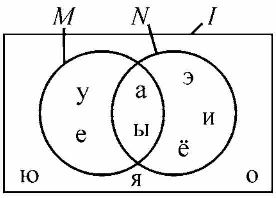


Рис. 4

В общем случае универсальным может быть любое непустое множество.

Упражнения

1. (РУ.ШК). На рис. 3 укажите элементы универсального множества, не входящие в множество Q.

2. (ОМ). Найдите кардинальное число множества I на рис. 3.

3. (ХЛИ). По рис. 3 найдите $|B(I)|$.

4. (ХХ). Перечислите все элементы, которые останутся в множестве I (рис. 3), если из него удалить все элементы, не входящие в множество Q.

5. На рис. 4 универсальное множество образуют гласные буквы русского алфавита.

(ПК.56). Укажите буквы (в алфавитном порядке), не входящие ни в множество M, ни в множество N.

6. (ЖУ). Перечислите буквы (в алфавитном порядке), которые останутся в множестве M (рис. 4), если все элементы множества N удалить.

7. (ОЙО). По рис. 4 найдите $|B(I)|$.

8. (ЭЮЮ). По рис. 4 найдите $|B(N)|$.

9. Даны множества:

$A = \{2, 20, 120, 16, 52, 502\}$;	$E = \{120, 502\}$;
$B = \{10, 2, 5\}$;	$F = \{12, 16, 25\}$;
$C = \{2, 20, 16\}$;	$K = \{20, 120, 502, 52, 16\}$;
$D = \{20, 16, 52\}$;	$M = \{502\}$.

(ОТС). Перечислите множества, являющиеся подмножествами множества A.

(ОН). Укажите сначала все истинные утверждения из нижеследующих, а затем — все ложные:

а) $B \subset A$;	д) $F \subset E$;
б) $C \subset A$;	е) $M \subset A$;
в) $D \subset A$;	ж) $\{512\} \subset A$;
г) $E \subset M$;	з) $\{121, 512\} \subset M$.

(Т56). Перечислите элементы множества C, которые останутся в нем, если удалить из него все элементы множества K.

(А4). Элементы множества C объединили с элементами множества D. В результате получилось новое множество S. Перечислите элементы множества S (в порядке возрастания).

10. Множество I состоит из двузначных чисел, кратных 9 и не содержащих цифры 0.

(ХО)! Найдите кардинальное число множества I. Найдите наименьшее число, входящее в множество I.

(88). Найдите $|B(C)|$, где C — множество, состоящее из чисел множества I, кратных 18.

(ДО). Перечислите элементы множества $D \subset I$, представляющие собой числа, делящиеся на 4 без остатка.

11. (ВЛЕ). Известно, что $A \subset B$ и $a \in A$. Какие из следующих записей верны:

а) $a \subset A$;	г) $a \notin B$;
б) $\{a\} \subset B$;	д) $A \in B$;
в) $a \in B$;	е) $\{a\} \subset A$?

1.4. Объединение множеств

Объединением или **суммой** [47, с. 93] n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из этих n множеств:

$$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n,$$

где знак $\bigcup$ обозначает операцию объединения множеств.

Формально операция объединения множеств определяется следующим образом:

$$A = \{x \,/\, x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\},$$

где $\vee$ — логический знак, обозначающий союз ИЛИ. Читается эта запись так: множество A — это все те значения x, которые принадлежат множеству A_1, или множеству A_2, или множеству A_3 и так далее до множества A_n.

Например, пусть даны множества:

$$A_1 = \{a, b, c\}; \quad A_2 = \{4\}; \quad A_3 = \{b, 54\}.$$

Применив к ним операцию объединения, получим новое множество

$$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = \{a, b, c, 4, 54\}.$$

Заметим, что $b \in A_1$ и $b \in A_3$, однако в множество A элемент b входит только один раз (вспомним: все элементы множества должны быть различными).

На диаграммах Венна объединение множеств обозначают сплошной штриховкой областей, соответствующих этим множествам. На рис. 5 заштрихована область множества $P \bigcup Q$. На рис. 6 показана штриховкой область множества $(P \bigcup Q) \bigcup R$. На рис. 7 изображено три множества P, Q и R. Штриховкой отмечено множество $Q \bigcup R$.

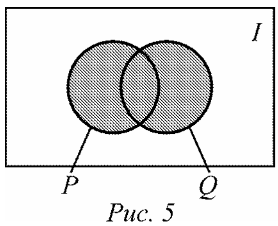


Рис. 5

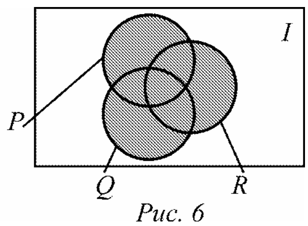


Рис. 6

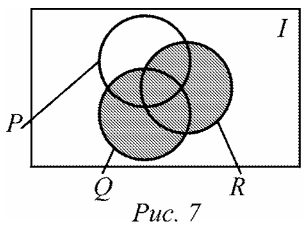


Рис. 7

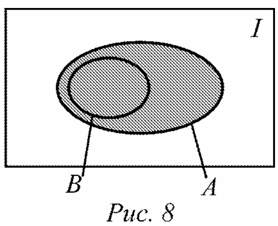


Рис. 8

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

а) объединение **коммутативно**:

$A \bigcup B = B \bigcup A$;

$A \bigcup B \bigcup C = A \bigcup C \bigcup B = B \bigcup A \bigcup C$ и т. д.;

б) объединение **ассоциативно**:

$(A \bigcup B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcup B = (B \bigcup C) \bigcup A = A \bigcup B \bigcup C.$

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, соединенных знаком объединения, скобки можно не использовать;

в) если $B \subseteq A$ или $B \subset A$, то $A \bigcup B = A$. На рис. 8 приведена диаграмма Венна для случая, когда $B \subset A$. Штриховкой отмечена область множества A, которая одновременно относится и к множеству $A \bigcup B$.

Из свойства «в» следует, что:

$$A \bigcup A = A; \qquad (2)$$

$$A \bigcup \varnothing = A; \qquad (3)$$

$$A \bigcup I = I. \qquad (4)$$

Упражнения

1. (РВ). Найдите элементы множества $A \bigcup B$, если $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$.

2. (ПЫ). Найдите элементы множеств: сначала A, затем — A_1, после этого — A_2 (числа упорядочить по возрастанию), если $A = \{x \,/\, x \in I \wedge (x \in A_1 \vee x \in A_2)$; $A_1 \subset I$ — множество чисел, кратных трем; $A_2 \subset I$ — множество чисел, кратных четырем}; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

3. (ГУМ). Дано три множества A, B, C. Известно, что $a \in A$. Укажите все верные утверждения:

а) $a \subset B$;
б) $a \in A \bigcup B$;
в) $a \subset B \bigcup C$;
г) $a \in A \bigcup B \bigcup C$;
д) $\{a\} \subseteq A$;
е) $\{a\} \in B$;
ж) $\{a\} \subseteq A \bigcup B$;
з) $\{a\} \in B \bigcup C$;
и) $\{a\} \subseteq A \bigcup B \bigcup C$.

4. (ОР)! На рис. 9 приведена диаграмма Венна для трех множеств. Найдите элементы множеств $A \bigcup B$, затем — $A \bigcup C$.

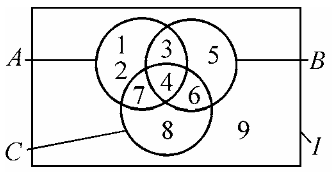


Рис. 9

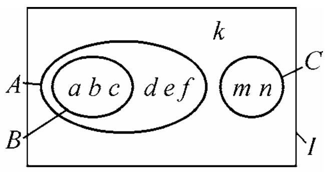


Рис. 10

5. (НЕ). Перечислите элементы множества M (рис. 9):

$$M = \{x \,/\, x \notin A \wedge x \in I\}.$$

6. (ШБ). Перечислите элементы множества N (рис. 9):

$$N = \{x \,/\, x \in A \bigcup B,\ x > 4\}.$$

7. (ПВ). Перечислите элементы множества K, если $K = \{x \,/\, x \in A \bigcup B \bigcup C,\ x$ — четное число$\}$(рис. 9).

8. (63). Перечислите элементы множества T (рис. 9):

$$T = \{x \,/\, x \notin A \bigcup C,\ x \in I\}.$$

9. (56С). Найдите кардинальное число множества $A \bigcup B$, если

$$A = \{a, b, c\}; \qquad B = \{6, 7, 8, 9\}.$$

10. (ЯРР). Найдите кардинальные числа множеств $A \bigcup B$, $A \bigcup C$, $B \bigcup C$ по диаграмме Венна (рис. 10).

11. (НТО). Найдите кардинальное число множества $A \bigcup B$, если

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \qquad B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

12. (МУФ). Найдите кардинальное число множества $A \bigcup B$, если $A = \{\varnothing\}$; $B = \{a, b, c\}$.

13. (ОМУ). Найдите кардинальное число множества $B(P) \bigcup B(Q)$, где

$$P = \{a, b, c\}; \qquad Q = \{b, c, d\}.$$

14. (ЯВЕ). Найдите кардинальное число множества $B(K) \bigcup B(M)$, где

$K = \{x \,/\, x$ — четное натуральное число, $x \le 8\}$;
$M = \{x \,/\, x$ — нечетное натуральное число, $x < 6\}$.

15. (ТЕК). Сколько собственных подмножеств имеет множество $P = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — син-глетоны, попарно не равные между собой?

1.5. Пересечение множеств

Пересечением или произведением [47, с. 93] n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество A, каждый элемент которого принадлежит каждому из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \ldots \bigcap A_n,$$

где знак $\bigcap$ обозначает операцию пересечения множеств.

Формально операция пересечения определяется следующим образом:

$$A = \{x \,/\, x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\},$$

где $\wedge$ — логический знак, обозначающий союз И.

Читается эта запись так: множество A — это все те значения x, которые входят и в множество A_1, и в множество A_2, и так далее до множества A_n.

Например, пусть даны множества:

$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, c, d, e\}$; $C = \{c, d, e, f\}$.

Применив к ним операцию пересечения, получим новое множество K:

$$K = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} \cap \{c, d, e, f\} = \{c, d,\}.$$

Как и в случае объединения множеств, их пересечение на диаграммах Венна обозначается штриховкой. На рис. 11 заштрихована область, относящаяся одновременно к обоим множествам P и Q, где

$$P = \{1, 3, 5, 7\}; \quad Q = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Из диаграммы видно, что $P \bigcap Q = \{5, 7\}$.

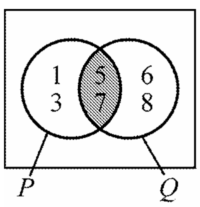


Рис. 11

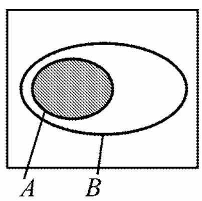


Рис. 12

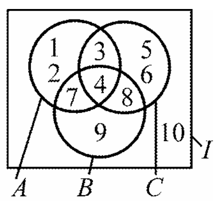


Рис. 13

Операции пересечения множеств присущи те же свойства, что и операции объединения:

а) **пересечение коммутативно**:

$A \bigcap B = B \bigcap A$;

$A \bigcap B \bigcap C = B \bigcap A \bigcap C = C \bigcap A \bigcap B$ и т. д.;

б) **пересечение ассоциативно**:

$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap C) \bigcap B = A \bigcap B \bigcap C.$

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, объединенных знаком пересечения, скобки можно не ставить;

в) если $A \subseteq B$ или $A \subset B$, то $A \cap B = A$. На рис. 12 приведена диаграмма Венна для $A \subset B$. Заштрихована область, относящаяся к обоим множествам A и B. Так как $A \subset B$, то все элементы множества A одновременно являются элементами множества B.

Из свойства «в» следует, что:

$$A \cap A = A; \tag{5}$$

$$A \cap I = A; \tag{6}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing. \tag{7}$$

Необходимо отметить еще два свойства: **дистрибутивность пересечения относительно объединения**:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{8}$$

и **дистрибутивность объединения относительно пересечения**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{9}$$

В справедливости этих свойств нетрудно убедиться при помощи диаграмм Венна.

Свойство (9) можно получить из свойства (8), если все знаки объединения заменить знаками пересечения, а все знаки пересечения заменить знаками объединения. Точно таким же образом можно получить формулу (8) из формулы (9).

В литературе по дискретной математике принято: если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то первой выполняется операция пересечения, а затем — объединения. Благодаря такому соглашению многие формулы можно записывать без скобок и использовать их только в тех случаях, когда порядок действий необходимо изменить.

Для примера рассмотрим формулу:

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cap B \cup B \cap C.$$

Если учесть принятое соглашение, то обе части этого выражения будут восприниматься однозначно.

Если же сначала должна выполняться операция объединения, а затем — пересечения, то необходимо использовать скобки. Например: $(A \cup B \cup C) \cap D$. В этом выражении первой выполняется операция объединения и лишь затем — пересечения.

Упражнения

1. Найдите элементы множества $A \cap B$, если:

(БК). $A = \{b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$;

(МБМ). $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$;

(ЦК). $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$;

(БАР). A = {март, апрель, май}, B = {май, июнь}.

2. Найдите элементы множества $P \cap Q$, если:

(ДОТ). $P = \{x / x < 12$, x — натуральное число$\}$,
$Q = \{x / x > 10$, x — натуральное число$\}$;

(ТЛ). $P = \{x / x \le 12$, x — натуральное число$\}$,
$Q = \{x / x \ge 10$, x — натуральное число$\}$;

(ТИС). $P = \{x / x$ — натуральное простое число$\}$,
$Q = \{x / x$ — четное натуральное число$\}$.

3. Найдите элементы множества $A \cup B \cap C$, если

(ЫН). $A = \{0, 1, 2, 3\}$,
$B = \{x / x < 10$, x — натуральное число$\}$,
$C = \{x / x > 8$, x — натуральное число$\}$;

(АМ). $A = \{b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a, b, c, d\}$;

(РВ). $A = B = C = \{b, c, d\}$.

4. (ДЫВ). Найдите кардинальное число множества $A \cap B \cup C$, если:

$A = \{x / x < 100$, x — натуральное число, оканчивающееся нулем$\}$;

$B = \{x / x > 50$, x — натуральное число$\}$;

$C = \{x / x < 20$, x — простое число$\}$.

5. (ОТ)! Найдите элементы множеств $X \cap Y$, $X \cap Z$, $Y \cap Z$, если: $X = \{3,4,5,7\}$; $Y = \{5,7,8\}$; $Z = \{7,8,9\}$.

6. (АНУ). Укажите верные выражения:

а) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$;

б) $(B \cup C) \cap A = A \cap B \cup A \cap C$;

в) $A \cap B = B \cap A$;

г) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cap (B \cup C)$;

д) $A \cap B \cup A \cap C = A \cup B \cap C$;

е) $A \cap (B \cup C) = A \cup B \cap C$.

7. (ЛЛЛ). Найдите $|B(Q)|$, где $Q = A \cap B \cup A \cap C$, если: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

8. (ФОК). Найдите $|B(Q)|$, где
$Q = A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C$, если: $A = \{a, b, c, d, e\}$;
$B = \{b, c, d, e, f\}$; $C = \{c, d, e, f, k\}$.

9. (КЕН)! По диаграмме Венна (рис. 13) найдите элементы множеств: сначала $A \cap B$, затем $B \cap C$.

10. (АИМ). По диаграмме Венна (рис. 13) найдите элементы множества $A \cup B \cap C$.

11. (25К). Найдите $|B(Q)|$, где $Q = A \cap B \cup A \cup C$ (рис. 13).

12. (ЛИО). Укажите номера верных выражений:

1) $A \cap A \cap (A \cup B) = A \cup A \cap B \cup A \cap B \cap C$;

2) $(A \cup B) \cap \varnothing = \varnothing$;

3) $\varnothing \cup A \cap B = \varnothing \cap (A \cup B) \cup \varnothing \cap C$;

4) $(A \cap I) \cup B = A \cup B$;

5) $A \cap \varnothing \cup B = B$;

6) $A \cap \varnothing \cap B = A \cap B$.

13. (АОИ). Укажите пустые множества, если $A \ne \varnothing$, $B \ne \varnothing$, $I \ne \varnothing$:

а) $A \cup \varnothing$;
б) $A \cap B \cap \varnothing$;
в) $(A \cup B) \cap I \cap \varnothing$;
г) $\varnothing \cup \varnothing \cap A$;
д) $I \cup \varnothing \cap A$;
е) $I \cap \varnothing \cup \varnothing$.

14. (ЛИС). Найдите кардинальное число множества $P = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, если множества A_1, A_2, A_3, A_4 — синглетоны, попарно не равные между собой.

1.6. Дополнение множества

Если I — универсальное множество, то **дополнением** множества A называется множество всех тех элементов, которые являются элементами множества I, но не входят в множество A. Это значит, что если элементы множества A обладают некоторыми свойствами, то каждый из элементов дополнения множества A этими свойствами не обладает (одним или несколькими). Пусть I — множество домов. Выделим в нем множество A деревянных одноэтажных домов. Тогда в дополнение войдут все недеревянные и все неодноэтажные дома, как деревянные, так и не деревянные.

Обозначается дополнение чертой над символом множества: $\overline{A}$ (в литературе встречаются и другие обозначения: $-A$, A', $\sim A$, NA, $\neg A$ и др.).

Формально операцию дополнения можно определить следующим образом:

$$\overline{A} = \{x / x \notin A \wedge x \in I\}.$$

Читается эта запись так: множество $\overline{A}$ — это все те значения x, которые не входят в множество A, но являются элементами универсального множества I.

Например, если I — множество десятичных цифр и $A = \{1, 3, 4\}$, то $\overline{A} = \{0, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

На рис. 14 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая операцию дополнения. Из диаграммы видно:

$$A \cup \overline{A} = I; \qquad (10)$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing; \qquad (11)$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

(12)
свойство инволюции);

если $A = \varnothing$, то $\overline{A} = I$, т. е. $\overline{\varnothing} = I$; (13)

если $A = I$, то $\overline{A} = \varnothing$, т. е. $\overline{I} = \varnothing$. (14)

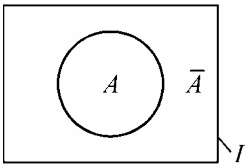


Рис. 14

Дополнение множества A возможно не только до универсального, но и до любого множества Q, если $A \subseteq Q$:

$$\overline{A}^{Q} = \{x \,/\, x \notin A,\ x \in Q,\ A \subseteq Q\},$$

где знак Q при символе $\overline{A}$ (т. е. $\overline{A}^{Q}$) говорит о том, что операция дополнения осуществляется до множества Q [3, с. 12]. Например, если

$A = \{1, 2, 3\}$ и $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $\overline{A}^{Q} = \{4, 5\}$.

Упражнения

1. Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите элементы, входящие в множество $\overline{A}$, если:

(ШУЛ). $A = \{3, 4\}$; (950). $A = \{1, 2, 3, 4,5\}$;
(ЛВВ). $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; (ГИЧ). $A = \varnothing$.

2. (361). Найдите элементы множества $\overline{A}$, если A — множество всех простых чисел, не превышающих 7, $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

3. (ПКМ). Найдите $|\overline{A}|$, если $I = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$; $A = \{x \,/\, x < 20, x$ — простое число$\}$.

4. (ФУХ). Дано: $|\overline{A}| = 12$. Найдите $|A|$, если $|I| = 50$.

5. (А28). Найдите элементы множества $\overline{\overline{A}}$, если $A = \{1, 4, 7\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

6. (ЦКП). Дано: $|A| = 24$; $|I| = 42$. Найдите $|\overline{\overline{A}}|$.

7. (750)! Дано:

$A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Найдите сначала элементы множества $\overline{A}^{B}$, затем элементы множества $\overline{A}$.

8. (353)! Дано: $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Найдите элементы множества A, если $\overline{A}^{B} = \{6, 7\}$.

Найдите элементы множества C, если $\overline{C}^{B} = \{3, 4, 5\}$.

Найдите элементы множества D, если $\overline{D}^{B} = \varnothing$.

9. (ТКС)! Дано: $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите кардинальное число множества $B(\overline{A})$, то есть число элементов булеана множества $\overline{A}$, если A — синглетон. Найдите $|\overline{A}|$.

1.7. Законы де Моргана

Огастес де Морган (1806—1871) — шотландский математик и логик.

Законы де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \qquad (15)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (16)$$

Закон (15) формулируется следующим образом: **дополнение объединения есть пересечение дополнений.** Аналогично формулируется закон (16): **дополнение пересечения есть объединение дополнений.**

Убедиться в справедливости соотношений (15) и (16) можно при помощи диаграмм Венна. Обратимся к выражению (15). На рис. 15 вертикальной штриховкой обозначена область, соответствующая левой части формулы (15). Она обозначает дополнение множества $A \cup B$.

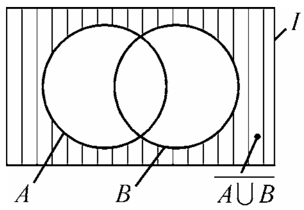


Рис. 15

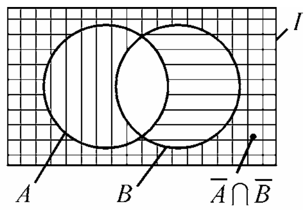


Рис. 16

Правая часть равенства (15) состоит из пересечения множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Множество $\overline{A}$ нанесем на диаграмму Венна горизонтальной штриховкой (рис. 16), а множество $\overline{B}$ — вертикальной. Тогда двойная штриховка будет со-ответствовать пересечению множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Из рис. 15 и 16 видно, что множества $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$ занимают на диаграммах Венна одну и ту же область, следовательно, соотношение (15) справедливо.

Аналогично можно доказать справедливость формулы (16). На рис. 17 приведена диаграмма Венна для левой части равенства (16). Вертикальной штриховкой на ней обозначено дополнение множества $A \cap B$.

Правая часть равенства (16) есть объединение двух множеств: $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Множество $\overline{A}$ (рис. 18) обозначим горизонтальной штриховкой, а множество $\overline{B}$ — вертикальной. Незаштрихованной осталась область $A \cap B$. Все, что заштриховано, относится к дополнению множества $A \cap B$, то есть $\overline{A \cap B}$. Таким образом, заштрихованные области на рис. 17 и 18 совпадают, что и доказывает справедливость утверждения (16).

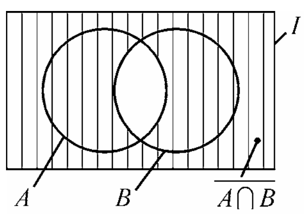


Рис. 17

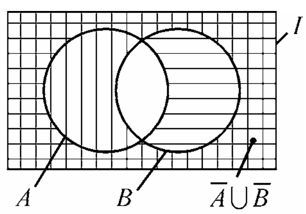


Рис. 18

Правила де Моргана применимы не только к двум, но и к большему числу множеств. Например:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}; \qquad \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

$$\overline{A \cup B \cup C \cup D} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D};$$

$$\overline{A \cap B \cap C \cap D} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D} \text{ и т.д.}$$

Упражнения

1. Даны множества: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите элементы множеств:

(ИНА). $\overline{A\cup B}$; (РОВ). $\overline{A\cap B}$; (УВД). $\overline{\overline{A}\cap B}$;

(ТВВ). $\overline{\overline{A}\cup B}$; (МЕТ). $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$; (ЯВЕ). $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

2. Упростите выражения, если $A\subset B$:

(861). $\overline{A\cup B}$; (ОИЗ). $\overline{A\cap B}$; (737). $\overline{\overline{A}\cup B}$;

(ФАХ). $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$; (РТК). $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$; (438). $\overline{A\cup\overline{B}}$.

3. Вместо точек поставьте знак = или $\neq$:

(ФИР)!

$A\cup B \ldots \overline{A}\cup\overline{B}$;

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}} \ldots A\cup B$;

$A\cup\overline{B\cap C} \ldots A\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;

$P\cup\overline{Q\cup P}\cup Q \ldots \overline{\varnothing\cap A}$;

$\overline{\overline{A\cup I}\cup I} \ldots \overline{\overline{A}\cup\varnothing}$;

$\overline{\overline{A\cup A}\cup\overline{A\cup A}} \ldots A$.

(ВАС)!

$\overline{A\cup\overline{I}} \ldots \overline{A}$;

$\overline{A\cap B}\cup\overline{A} \ldots \overline{A\cap B}$;

$\overline{A\cap\varnothing}\cup\overline{B\cap I} \ldots \overline{I}$;

$A\cap\varnothing\cup\overline{P\cap\overline{P}} \ldots A\cup\overline{A}$;

$\overline{A\cup I}\cap\overline{B\cup\varnothing} \ldots \overline{A\cup\overline{A}}$;

$\overline{\overline{A\cap\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}\cap B}} \ldots I$.

4. (УУФ). Найдите $|B(P)|$, где $P = \overline{A\cup\overline{B}}$, если

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 5, 7, 8, 9\}$.

5. (342). Найдите $|B(Q)|$, где $Q = \overline{A\cup B}$, если $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Упростите выражения, если $A\subset B$, $B = C$.

(КВЗ)!

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$;

$\overline{A\cup B\cap\overline{C}}$;

$A\cup\overline{\overline{B\cup\overline{C}}}$.

(884)!

$\overline{A\cup A\cap B\cup A\cap C}$;

$\overline{A\cup\overline{\overline{B}\cap C}}$;

$\overline{A\cap\overline{B}\cap C}\cup I$.

1.8. Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих множеству A, но не входящих в множество B. Обозначать разность множеств будем знаком минус (другими авторами используется также наклонная черта \ ):

$$A - B = \{\, x\,/\, x\in A \wedge x\notin B\} = A\cap\overline{B}.$$

Аналогично записывается разность $B - A$:

$$B - A = \{\, x\,/\, x\in B \wedge x\notin A\} = \overline{A}\cap B.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4, 5\}$, тогда $A - B = \{1, 2\}$; $B - A = \{4, 5\}$.

На рис. 19 приведена диаграмма Венна, где штриховкой обозначена разность $A - B$.

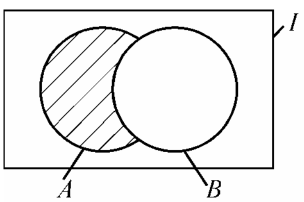


Рис. 19

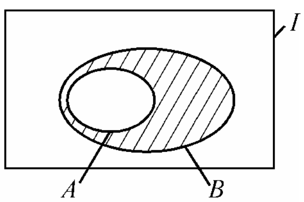


Рис. 20

Если $A\subset B$ или $A\subseteq B$, то $A - B = \varnothing$. Пусть $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Чтобы найти множество $A - B$, из множества A необходимо удалить все элементы, принадлежащие множеству B. В результате получится пустое множество.

Если $A\subset B$, то $B - A = \overline{A}^{B}$, то есть при $A\subset B$ разность $B - A$ совпадает с дополнением множества A до множества B. На рис. 20 множество $B - A$ обозначено штриховкой.

Если $A = B$, то очевидно, что $A - B = B - A = \varnothing$.

Если $B = I$, то $I - A = \overline{A}$, т. е. разность универсального множества и множества A есть дополнение множества A до универсального.

В тех случаях, когда разность множеств применяется к трем и более множествам, необходимо использовать скобки, поскольку

$$(A - B) - C \neq A - (B - C),$$

т. е. разность множеств неассоциативна. Если же условиться выполнять эту операцию в строгом порядке слева направо, то скобки можно не ставить:

$$A - B - C = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}; \qquad A - B - C - D = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}.$$

Упражнения

1. (НУ). Найдите элементы множества $A - B$, если $A = \{3, 4, 6, 7\}$; $B = \{6, 7, 8\}$.

2. (604). Найдите элементы множества $A\cup B$, если $A - B = \{2, 4, 5\}$; $B = \{6, 7, 8\}$.

3. Даны множества: $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$; $B = \{3, 4, 6, 7, 9\}$; $C = \{0, 5, 6, 7, 8\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Найдите элементы множеств:

(ХМА). $A - (B\cup C)$; (КЭР). $A - (B\cap C)$;

(ТРТ). $B - (A\cap\overline{C})$; (ЦОС). $C - (\overline{A}\cap B)$;

(КЦК). $A - (B - C)$; (АРО). $(A\cup B) - (A\cap B)$.

4. Дано: $A = \{0, 1, 2, 5\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{2, 5, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите элементы множеств:

(ТМЕ). $(A\cup B\cup C) - B$; (029). $(A\cup B) - (A\setminus B)$;

(22У). $(A\cup B\cup\overline{C}) - (B\cup C)$; (КУП). $(\overline{A}\cup B) - (A\cap\overline{B})$;

(Р34). $A - (B\cap\overline{B})$; (ЗЕЛ). $I - (A\cup B\cup C)$.

5. (ЗРЯ). Укажите пустые множества, если известно, что $A\subset B\subset C$, $A\neq\varnothing$, $\overline{C}\neq\varnothing$:

а) $(B - C)\cap(A\cup B)$; г) $C\cap(B - \overline{A})$;

б) $[\overline{C}\cap(A\cup B\cup C)] - B$; д) $(A\cap\overline{B})\cup(B - C)$;

в) $C\cup(\overline{A} - \overline{B})$; е) $A\cup(B - C)$.

1.9. Симметрическая разность множеств

Симметрическая разность множеств A и B (ее иногда называют также дизъюнктивной разностью) — это мно-жество вида

$$A\oplus B = \{\, x\,/\, x\in A \wedge x\notin B, \text{ или } x\notin A \wedge x\in B\},$$

где знак $\oplus$ обозначает операцию симметрической разности (используют и другие знаки, например $A\,\Delta\,B$ [3]).

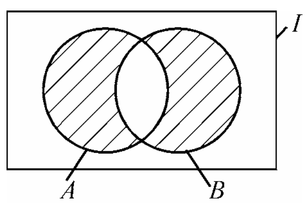


Рис. 21

Симметрическую разность можно выразить через дополнение, пересечение и объединение:

$$A\oplus B = A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B. \tag{17}$$

На рис. 21 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая симметрическую разность множеств. Из диаграммы видно, что симметрическая разность может быть выражена через разность множеств и операцию объединения:

$$A \oplus B = (A - B) \bigcup (B - A).$$

Например, если $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6,7\}$, то

$$A \oplus B = \{1, 2, 5, 6, 7\}.$$

Симметрическая разность множеств обладает свойствами (их нетрудно доказать с помощью диаграмм Венна):

а) **коммутативности**: $A \oplus B = B \oplus A$;

б) **ассоциативности**:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C,$$

т. е. если знаком симметрической разности соединяются более двух символов, то скобки можно не ставить;

в) дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности:

$$A \bigcap (B \oplus C) = (A \bigcap B) \oplus (A \bigcap C).$$

Если условиться считать, что первой всегда выполняется операция пересечения, а затем — симметрической разности, то скобки можно не ставить:

$$A \bigcap (B \oplus C) = A \bigcap B \oplus A \bigcap C.$$

Благодаря свойству дистрибутивности можно раскрывать скобки в сложных выражениях и записывать формулы в виде симметрической разности пересечений. Например:

$$(A \oplus B \oplus C) \bigcap (D \oplus E) =$$

$$= A \bigcap D \oplus A \bigcap E \oplus B \bigcap D \oplus B \bigcap E \oplus C \bigcap D \oplus C \bigcap E.$$

Операция симметрической разности множеств не является дистрибутивной относительно пересечения:

$$A \oplus B \bigcap C \neq (A \oplus B) \bigcap (A \oplus C). \qquad (18)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, выразим обе части неравенства (18) через операции объединения, пересечения и дополнения и результаты представим в виде диаграмм Венна.

Левую часть преобразуем в соответствии с формулой (17):

$$A \oplus B \bigcap C = A \bigcap \overline{B \bigcap C} \bigcup \overline{A} \bigcap B \bigcap C =$$

$$= A \bigcap (\overline{B} \bigcup \overline{C}) \bigcup \overline{A} \bigcap B \bigcap C =$$

$$= A \bigcap \overline{B} \bigcup A \bigcap \overline{C} \bigcup \overline{A} \bigcap B \bigcap C.$$

На рис. 22 приведена диаграмма Венна, на которой штриховкой обозначено полученное множество.

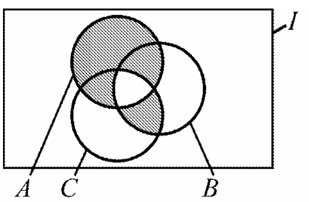


Рис. 22

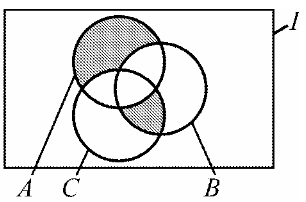


Рис. 23

Аналогично преобразуем правую часть выражения (18):

$$(A \oplus B) \bigcap (A \oplus C) = (A \bigcap \overline{B} \bigcup \overline{A} \bigcap B) \bigcap (A \bigcap \overline{C} \bigcup \overline{A} \bigcap C) =$$

$$= A \bigcap \overline{B} \bigcap \overline{C} \bigcup \overline{A} \bigcap B \bigcap C.$$

На рис. 23 приведена диаграмма Венна, на которой заштрихована область, соответствующая полученному выражению. Из диаграмм (рис. 22 и 23) видно, что отмеченные на них множества не совпадают, следовательно, неравенство (18) справедливо.

Рассмотрим еще несколько свойств симметрической разности множеств:

а) $A \oplus \varnothing = \varnothing \oplus A = A$;

б) если $A = B$, то $A \oplus A = \varnothing$, что следует из (17);

в) если $A \subset B$, то $A \oplus B = B - A = \overline{A} \bigcap B$;

г) если $A \supset B$, то $A \oplus B = A - B = A \bigcap \overline{B}$;

д) если $A \bigcap B = \varnothing$, то $A \oplus B = A \bigcup B$;

е) $A \oplus B \oplus (A \bigcap B) = A \bigcup B$.

Упражнения

1. (ТМ). Найдите элементы множества $A \oplus B$, если:

$$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{a, c, d, e\}.$$

2. (ЮАЛ)! Известно, что $A - B = \{1, 2\}$; $B - A = \{3, 4\}$; $A \bigcap B = \{5, 6\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$. Найдите элементы множества A.

3. (УЗО). Даны множества: $A \bigcap \overline{B} = \{a,b,c\}$; $B = \{d,e,f\}$; $A \bigcap B = \{d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$.

4. (ЗТТ). Найдите элементы множества $\overline{A \oplus B}$, если $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A - B = \{1, 6\}$, $B - A = \{3\}$.

5. (ОИХ). Дано: $A \bigcup B = \{a,b,c,d,e,f\}$; $A \bigcap B = \{c,d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$ (лат.).

6. Упростите выражения:

(ОЦН). $A \oplus A \oplus A \oplus A$; (МАМ). $I \oplus B \oplus B \oplus B$;

(ЧЕШ). $A \oplus \overline{A} \bigcap \overline{B} \oplus \overline{A} \bigcap B$; (ОВУ). $A \oplus \overline{A} \oplus I$.

7. (756). Даны множества: $A \oplus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\overline{A \bigcup B} = \{8\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Найдите элементы множества $A \bigcap B$.

8. Укажите верные выражения.

(26).

а) $A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$;

б) $A \oplus B \bigcap C = A \oplus B \bigcap C \oplus \varnothing$;

в) $A \oplus B \oplus I = A \oplus B$;

г) $A \oplus I \oplus I = A \oplus I$;

д) $A \oplus \varnothing \oplus \varnothing = A \oplus \varnothing$;

е) $A \oplus \overline{A} = A \bigcup \overline{A}$.

(АХ).

а) $A \bigcap (B \oplus C) = A \bigcap B \oplus A \bigcap C$;

б) $A \oplus B \oplus A \bigcap B = A \bigcup B$;

в) $A \oplus \overline{B} \oplus A \bigcap \overline{B} = A \bigcup \overline{B}$;

г) $(A \oplus I) \bigcap A = \varnothing$;

д) $(A \oplus I \oplus I) \bigcap A = \varnothing$;

е) $(A \bigcup B) \oplus A = \overline{A} \bigcap B$.

9. (ЯД). Дано: $A \bigcup B = \{a, b, c, d, e\}$; $\overline{A} \bigcap \overline{B} = \varnothing$; $\overline{A \oplus B} = \{c,d\}$. Найдите элементы множества $A \bigcap B$ и элементы множества $A \oplus B$ (лат.).

1.10. Закон поглощения

Закон **поглощения** имеет две формы записи (дизъюнктивная и конъюнктивная соответственно):

$$A \bigcup A \bigcap B = A; \qquad (19)$$

$$A \bigcap (A \bigcup B) = A. \qquad (20)$$

На рис. 24 приведена диаграмма Венна для дизъюнктивной формы $A \bigcup A \bigcap B = A$. Вертикальной штриховкой на диаграмме обозначена область A, горизонтальной — область $A \bigcap B$. Штриховка не выходит за пределы области A, следовательно, все элементы множества $A \bigcup A \bigcap B$

входят в множество A, что и доказывает справедливость равенства (19).

Из рис. 24 видно, что множество A не изменяется от добавления к нему элементов множества $A\cap B$, т. е. множество A как бы поглощает все элементы множества $A\cap B$, откуда и происходит название закона.

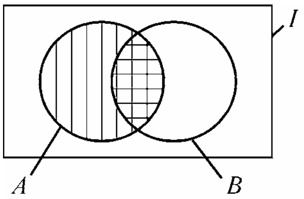


Рис. 24

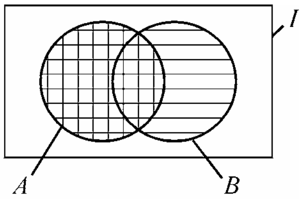


Рис. 25

На рис. 25 приведена диаграмма Венна для конъюнктивной формы. Вертикальной штриховкой обозначено множество A, горизонтальной — множество $A\cup B$. Двойная штриховка обозначает множество $A\cap(A\cup B)$, что соответствует левой части выражения (20). Она занимает всю область множества A и не выходит за ее пределы. Следовательно, множества $A\cap(A\cup B)$ и A состоят из одних и тех же элементов, то есть равны, откуда следует справедливость формулы (20).

Законы поглощения дают возможность упрощать аналитические выражения, описывающие множества. Проиллюстрируем это на примере. Пусть некоторое множество P представлено выражением вида

$$P = A\cap B\cup A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap C\cap D.$$

Пересечение $A\cap B\cap C$ встречается в этом выражении два раза. Обозначим его $Q = A\cap B\cap C$. Заданное множество P примет вид: $P = A\cap B\cup Q\cup Q\cap D$.

Согласно выражению (19) имеем: $Q\cup Q\cap D = Q$, следовательно,

$$P = A\cap B\cup Q = A\cap B\cup A\cap B\cap C.$$

Снова введем обозначение: $A\cap B = R$, тогда

$$P = R\cup R\cap C = R.$$

В результате получаем окончательно: $P = A\cap B$.

Рассмотрим еще один пример. Упростим выражение

$$S = P\cap\overline{Q}\cap(P\cap\overline{Q}\cup R).$$

Введем обозначение: $P\cap\overline{Q} = V$, тогда множество S представится в виде

$$S = V\cap(V\cup R).$$

Согласно формуле (20) получаем:

$$S = V\cap(V\cup R) = V = P\cap\overline{Q}.$$

Упражнения

(Знак $\cap$ не набирать, то есть вместо $A\cap B$ надо набирать AB).

1. Упростите выражения (лат.):

(539). $\overline{A}\cap B\cap C\cup\overline{A}\cap B$; (ХСС). $A\cap\overline{B}\cap C\cup\overline{B}$;

(ОИО). $A\cap B\cap\overline{D}\cup\overline{D}$; (АЧА). $A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap C$;

(ДИР). $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cup\overline{A}$; (ЖИВ). $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cup\overline{C}$.

2. Найдите элементы множеств:

(962). $A\cap B\cap C\cup A\cap C$;

(НАЖ). $B\cap\overline{C}\cup\overline{C}\cup A\cap\overline{C}$;

(ЦАЙ). $A\cap C\cup A\cap B\cap C\cup A\cap C\cap D$,

если A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = {2, 3, 4, 5, 6}; C = {2, 3, 6, 7}; D = {2, 5, 6, 7, 8}; I = {0, 1, 2, …, 9}.

3. Упростите выражения (лат.):

(АСС). $A\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap D$;

(РВР). $B\cap C\cap D\cup C\cap D\cup A\cap C\cap D$;

(438). $B\cap(\overline{A}\cap B\cup\overline{B}\cap B)$;

(УФУ). $A\cap\overline{C}\cap(A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap\overline{B})$;

(МАГ). $(A\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{B}\cup C)\cap(A\cup\overline{B}\cup D)$;

(ЕГО). $(\overline{A}\cup B)\cap B\cap(B\cup\overline{C})$.

4. (РНК). Найдите элементы множества

$$A\cap B\cap\overline{C}\cup A\cap B\cup B,$$

где A = {1, 3, 5, 7}; B = {4, 5, 6, 7}; C = {1, 2}.

5. (ТЫН). Найдите элементы множества:

$$A\cap B\cap C\cup A\cap C\cap\overline{D}\cup A\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap C\cap D,$$

если A = {1, 2, 4, 6, 8}; B = {2, 3, 6}; C = {2, 4, 6, 7}; D = {4, 5, 7}.

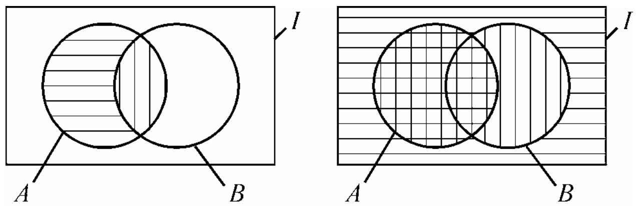
1.11. Закон склеивания

Закон (операция) **склеивания**, как и закон поглощения, имеет дизъюнктивную и конъюнктивную формы:

$$A\cap B\cup A\cap\overline{B} = A; \qquad (21)$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A \qquad (22)$$

Рассмотрим дизъюнктивную форму (21). На рис. 26, *а* множество $A\cap B$ обозначено вертикальной штриховкой, а множество $A\cap\overline{B}$ — горизонтальной. Область A оказалась полностью заштрихованной, при этом вне области A никакой штриховки нет. Следовательно, все элементы множества $A\cap B\cup A\cap\overline{B}$ образуют и множество A, откуда следует справедливость равенства (21).



а *б*

Рис. 26

Перейдем к выражению (22). Оно представляет собой пересечение двух множеств: $A\cup B$ и $A\cup\overline{B}$.

Обозначим множество $A\cup B$ вертикальной штриховкой на диаграмме Венна (рис. 26, *б*). Горизонтальной штриховкой на той же диаграмме обозначим множество $A\cup\overline{B}$. Двойной штриховкой заполнена область, соответствующая пересечению множеств $A\cup B$ и $A\cup\overline{B}$. Из диаграммы видно, что двойной штриховкой обозначена только область A, следовательно, A и $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$ — это множества, состоящие из одних и тех же элементов, что и доказывает справедливость выражение (22).

Истинность выражений (21) и (22) можно доказать и аналитически. Вынесем за скобки букву A в формуле (21), тогда в скобках получим объединение множества B и его дополнения. Объединение этих множеств есть универ-сальное множество. Пересечение универсального мно-жества и множества A есть множество A:

$$A\cap B\cup A\cap\overline{B} = A\cap(B\cup\overline{B}) = A\cap I = A.$$

Аналогичным образом докажем справедливость выражения (22), раскрыв сначала скобки:

$$(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A\cap A\cup A\cap\overline{B}\cup A\cap B\cup B\cap\overline{B} =$$
$$= A\cup A\cap\overline{B}\cup A\cap B = A\cup A\cap(\overline{B}\cup B) =$$
$$= A\cup A\cap I = A\cup A = A.$$

Законы склеивания используются при упрощении аналитических выражений, описывающих множества. Например:

$$A\cap B\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap C\cup B\cap C\cup\overline{B}\cap C =$$
$$= A\cap C\cap(B\cup\overline{B})\cup C\cap(B\cup\overline{B}) = A\cap C\cap I\cup C\cap I =$$
$$= A\cap C\cup C = C\cap(A\cup I) = C\cap I = C.$$

Упражнения

1. Упростите выражения:

(449). $A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap\overline{C}$;

(В66). $A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap B\cap C$;

(У65). $\overline{A}\cap B\cup\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap\overline{B}$;

(ДАЧ). $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}\cap C\cup\overline{A}\cap\overline{B}$;

(693). $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap D\cup\overline{A}\cap B\cap C\cap D$;

(9А2). $A\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B$.

2. Найдите элементы множеств:

(ВВ). $A\cap B\cap C\cup B\cap C\cup B\cap\overline{C}$;

(221). $(A\cap B\cup C)\cap(A\cap B\cup\overline{C})$;

(76). $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\overline{C})$;

(ТТ). $(A\cup\overline{B}\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)\cap B$,

если $A = \{1, 2, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 6, 7\}$; $C = \{2, 3, 6, 7\}$.

3. Расставьте вместо троеточий знаки $=$ или $\neq$.

(СИМ).

$A\cup B\cap C\cup\overline{B}\cap C\ldots A\cup C$;

$A\cap B\cup A\cap\overline{B}\ldots A\cap\overline{B}\cup A\cap B$;

$\overline{B}\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap C\cup B\ldots B$;

$A\cap B\cup B\cap C\cup\overline{A}\cap B\ldots B\cap C$;

$(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\ldots\overline{(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})}$;

$(A\cap B\cup C)\cap(\overline{A\cap B}\cup C)\ldots C$.

(ЛЫН).

$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap C\ldots B\cup C$;

$A\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap C\cup A\cap C\ldots A\cup C$;

$A\cap B\cup A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B\cup\overline{A}\cap\overline{B}\ldots\varnothing$;

$(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\ldots\varnothing$;

$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\ldots A\cap B$;

$(A\cap B\cup\overline{A}\cap B)\cap\overline{B}\ldots\varnothing$.

4. Упростите, если $A\subset B\subset C$:

(РИС). $A\cup B\cup A\cap C\cup\overline{A}\cap C$;

(ЦК). $B\cap C\cup B\cap\overline{C}\cup A\cup\overline{C}$;

(ЯГО). $(B\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap\overline{C})\cap A$;

(УВД). $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cup(A\cap C)$.

1.12. Теоретико-множественные преобразования

Обычно под теоретико-множественными преобразованиями понимают выполнение таких операций над множествами, в результате которых получается новое выражение, тождественно равное исходному, но внешне отличающееся от него набором символов, их числом, порядком записи и др. Часто целью преобразований является упрощение формул, сводящееся к уменьшению числа входящих в них знаков. Упрощенные выражения могут подвергаться дальнейшим преобразованиям с учетом каких-либо дополнительных условий. Такими условиями могут быть: учет отношений между множествами, замена одного множества другим, удаление того или иного множества и др. Все подобные преобразования осуществляются на основе свойств операций объединения, пересечения и дополнения с применением формул поглощения и склеивания, а также законов де Моргана.

Рассмотрим пример. Пусть требуется упростить формулу для множества P, выраженного через множества A, B, C, D, с учетом дополнительных условий: $C\subset D$ и $B = \varnothing$:

$$P = A\cap B\cup A\cap\overline{B}\cup B\cap D\cup C\cap D.$$

Сначала упростим заданное выражение без учета дополнительных условий:

$$P = A\cap(B\cup\overline{B})\cup B\cap D\cup C\cap D = A\cup B\cap D\cup C\cap D.$$

Найдем выражение P при $C\subset D$:

$$P = A\cup B\cap D\cup C.$$

Найдем выражение P при $B = \varnothing$ и $C\subset D$:

$$P = A\cup D\cap\varnothing\cup C = A\cup C.$$

Это и есть искомый результат упрощения.

Упражнения

1. Упростите выражения:

(556). $A\cap B\cap\overline{C}\cup A\cap B\cap C\cup C$.

(УЭЛ). $A\cap C\cup A\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap C$.

(ЦАМ). $B\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap C$.

(ТИН). $\overline{A}\cap\overline{B}\cup A\cap B\cup\overline{A}\cap B$.

2. Упростите выражения, если $C = I$, $D = \varnothing$.

(УТТ). $(A\cup B)\cap(C\cup D)$.

(ХТБ). $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cup B\cap C\cap D$.

(ШАВ). $(\overline{A}\cup B\cup C)\cap(C\cup D)$.

(МКП). $A\cap C\cup\overline{B}\cap C\cup A\cap D$.

(826). $\overline{A}\cap(B\cup C\cup D)\cap B\cap C$.

(МИН). $(A\cup B\cup C)\cap(\overline{B}\cup D)$.

3. Упростите, если $C\subset D$, $A\subset B$.

(АИ). $A\cap B\cap C\cap D$.

(УТ). $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$.

(АЮ). $(A\cup B)\cap(C\cup D)$.

(ОТЫ). $A\cap\overline{B}\cup C\cap\overline{D}$.

(УРУ). $\overline{A\cup B}\cap\overline{C\cup D}$.

(ББ). $(A\cup B\cup C)\cap(B\cup C\cup D)$.

4. Чему равны выражения, если $A = B = C = D = I$?

(МУФ). $(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{C}\cup D)$.

(МАХ). $A\cap B\cap\overline{E}\cup\overline{A}\cap E$.

(ЗУЗ). $(\overline{A}\cup\overline{B}\cup E)\cap(B\cup E)$.

(КВА). $(\overline{A}\cup E)\cap(\overline{B}\cup\overline{E})$.

(265). $A\cap B\cap\overline{E}\cup\overline{B}\cap E$.

(НЕП). $A\cap\overline{B}\cup C\cup E$.

5. Чему равны выражения, если принять $B = C = \varnothing$?

(РЛА). $A \cup B \cup C \cup D$.

(УЛА). $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$.

(РИД). $\overline{A} \cup B \cup D$.

(БКТ). $B \cap C \cup A \cap \overline{D}$.

(МАД). $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{C} \cup D)$.

(ЮХЕ). $(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup C)$.

6. Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $I = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Какие элементы необходимо удалить из множества I, чтобы выполнялись следующие равенства?

(657). $A \cap B = \varnothing$. (57). $B - A = \varnothing$.

(ЛВС). $A - B = \varnothing$. (МВ). $A \cup \overline{B} = \varnothing$.

(ББТ). $A \oplus B = \varnothing$. (ЮГ). $\overline{A \cup B} = \varnothing$.

7. Даны множества: $A = \{1,2,3\}$; $B = \{1,2\}$; $C = \{3,4,5\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите номера пустых множеств:

(В7).
1) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
2) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;
3) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;
4) $\overline{A} \cap B \cap C$;
5) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
6) $A \cap \overline{B} \cap C$.

(ВТ).
1) $A \cap B \cap \overline{C}$;
2) $A \cap B \cap C$;
3) $A \cap B \cup \overline{B} \cap C$;
4) $B \cap C \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
5) $A \cap B \cap C \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
6) $A \cup B \cup C$.

(ИЙ).
1) $(A \cup B) \cap \overline{C}$;
2) $(B \cup \overline{C}) \cap (A \cup C)$;
3) $(A \cup B) \cap A \cap C$;
4) $\overline{A} \cap B \cup B \cap C$;
5) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$;
6) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}} \cap A$.

8. Даны множества: $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$; $B = \{1, 2, 4\}$; $C = \{6, 7, 8\}$; $I = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Найдите элементы множеств:

(156). $A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{C}$;

(ЛБЛ). $A \cap \overline{B} \cap C \cup B \cap C$;

(ЕНЫ). $(A \cup B) \cap (B \cup \overline{C})$;

(ФФ). $B \cup A \cap \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C$;

(ЯК). $(A \cup \overline{C}) \cap (B \cup C)$;

(ЭХ). $A \cap B \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

2.1. Декартово произведение множеств

Декарт Рене — французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики — жил в XVII веке (1596—1659). Теория множеств сформировалась спустя 200 лет, поэтому Р. Декарт об этой теории никогда не слышал и заниматься ею не мог. Название операции «декартово произведение» появилось в связи с тем, что в теории множеств нашел применение метод координат, разработанный Р. Декартом.

Рассмотрим два непересекающихся множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Выберем какой-либо элемент из множества A и припишем к нему справа некоторый элемент множества B. Получим **упорядоченную** пару. Элементы, образующие пару, будем записывать в круглых скобках, отделяя один элемент от другого запятой: (a_i, b_j), где $a_i \in A$; $b_j \in B$; $i = 1,2,3,\ldots,n$; $j = 1, 2, 3, \ldots, m$. (Некоторые авторы упорядоченную пару обозначают иначе: $< a_i, b_j >$ [33]; $\langle x, y \rangle$ [19; 32].) Множество всех упорядоченных пар (a_i, b_j) обычно называют **декартовым произведением** множеств A и B (иногда — прямым произведением [19; 32]). Для обозначения этой операции используется знак арифметического умножения: $A \times B$.

Формально декартово произведение множеств A и B определяется следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}.$$

Читается эта запись так: декартово произведение множеств A и B — это множество пар (x, y), где x — элемент множества A, y — элемент множества B.

Точно так же определяется декартово произведение множеств $B \times A$:

$$B \times A = \{(y, x) \,/\, y \in B \wedge x \in A\}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Тогда

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\};$$

$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4)\}.$$

Из этих двух выражений следует, что $A \times B \neq B \times A$, то есть операция декартова произведения некоммутативна. Кроме того, $(A \times B) \cap (B \times A) = \varnothing$, если $A \cap B = \varnothing$. При этом множество $A \times B$ содержит те же пары, что и множество $B \times A$, но порядок записи элементов в парах другой. Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то и $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \varnothing$.

Рассмотрим, например, множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{c, d\}$. Пересечение этих множеств непусто:

$$A \cap B = \{c\}.$$

Найдем $A \times B$ и $B \times A$:

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\};$$

$$B \times A = \{(c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (c, c), (d, c)\}.$$

По этим двум выражениям видно, что множество $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(c, c)\}$, т. е. непусто.

Операция декартова произведения применима не только к двум, но и к бóльшему числу множеств:

$$M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,/\, a_1 \in A_1 \wedge \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Так как в общем случае операция декартова произведения некоммутативна, то всякая перестановка множеств в записи декартова произведения дает новое множество упорядоченных пар. Всего возможно $n!$ таких перестановок, следовательно, существует $n!$ множеств:

$$M_1 = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n;$$
$$M_2 = A_2 \times A_1 \times A_3 \times \ldots \times A_n;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$M_{n!} = A_n \times A_{n-1} \times \ldots \times A_2 \times A_1,$$

при этом $M_i \cap M_j = \varnothing$, где $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots, (n! - 1), n!$, если $A_v \times A_s = \varnothing$, где $v, s = 1, 2, \ldots, n$; $v \neq s$.

Операция декартова произведения множеств ассоциативна:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C,$$

благодаря чему при записи декартова произведения нескольких множеств скобки можно не использовать.

Для декартова произведения множеств справедливы следующие законы дистрибутивности [24, с. 137]:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C),$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, содержащих операцию декартова произведения и операции объединения либо разности множеств.

Если $|A|$ и $|B|$ — кардинальные числа множеств A и B, то

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|,$$

где точка между символами $|A|$ и $|B|$ обозначает операцию арифметического умножения. Например, при $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем:

$$|A| = 3; \quad |B| = 5; \quad |A \times B| = 3 \cdot 5 = 15.$$

В общем случае, если $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ — кардинальные числа множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdot \cdot |A_n|, \qquad (23)$$

то есть, чтобы определить число элементов декартова произведения нескольких множеств, достаточно найти арифметическое произведение их кардинальных чисел. Пусть, например,

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\};$$
$$B = \{a, b, c\};$$
$$C = \{x, y, z, v, w\},$$

тогда $|A| = 4$, $|B| = 3$, $|C| = 5$ и $|A \times B \times C| = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, т. е. множество $A \times B \times C$ содержит 60 упорядоченных троек $(1, a, x)$, $(1, a, y)$, $(1, a, z)$ и так далее до $(4, c, w)$.

Упражнения

1. (УЛ). Найдите элементы множества $(A{\times}B) \cap (B{\times}A)$, если

$$A = \{a, b\}; \qquad B = \{b, c\}.$$

При наборе элементов пар используйте запятую. Например: a, c. Скобки не вводить.

2. (5Б). Найдите $|A \times B|$ и $|(A \times B) \cap (B \times A)|$, если

$$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{b, c\}.$$

3. (АТ). Найдите элементы множества A и множества B, если

$$A \times B = \{(b, m), (c, m), (e, m), (b, n), (c, n), (e, n)\}.$$

4. (РЯО). Известно, что $|A \times B| = 49$. Множество B увеличили на три элемента. Получили множество B'. Найдите $|A \times B'|$, если A и B — не синглетоны.

5. (ПХВ). Найдите $|(A{\times}B) \cup (B{\times}C)|$, если $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{a, b, c, d, e\}$; $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

6. (БРУ). Найдите $|B\,(A \times C)|$, если $A = \{m, n, k\}$; $C = \{2, 4\}$, где $B\,(A \times C)$ — булеан множества $A \times C$.

7. (ДОН). Декартово произведение множеств A и B содержит 12 элементов. Известно, что

$$A = \{a, b, c\}; \quad A \cap B = \varnothing.$$

Найдите число собственных подмножеств мно-жества B.

8. (МЕН). Даны множества $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d, e\}$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A \cap B$; $Q = \overline{A} \cap B$.

9. (279)! Даны множества: $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, c, e, f\}$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A \oplus B$; $Q = A \cap B$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A$; $Q = \overline{A} \cap B$.

10. (137). Дано: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите номера упорядоченных пар, являющихся элементами множества $A \times B$:

1) a, 1; 2) 3, c; 3) b, c; 4) c, 5; 5) 2, 3; 6) 4, a; 7) b, 4.

11. (ЛГ)! Даны множества A, B, C. Известно, что $A \subset B \subset C$; $A \neq \varnothing$; $|A \cup B \cup C| = 3$. Найдите: $|B \times (\overline{B} \cap C)|$; $|A|$; $|B|$; $|C|$.

12. (ЧА)! Даны множества I, A, B. Известно, что $I = \{0, 1, \ldots, 7\}$; $\overline{A \cup B} = \{2, 3\}$; $A \oplus B = \{0, 1, 4\}$. Найдите элементы множества $A \cap B$. Определите $|\overline{A \oplus B} \times (A \cap B)|$.

2.2. Степень множества

Если в декартовом произведении n множеств A_1, $A_2, \ldots, A_n$ принять $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то получим

$$M = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} = A^n,$$

где A^n — **степень** множества A [3]. Элементы множества A^n называют **кортежами** длины n. Пусть, например, $A = \{a, b, c\}$, тогда

$$A^1 = \{(a), (b), (c)\};$$
$$A^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\};$$
$$A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), \ldots, (c, c, c)\};$$
$$A^4 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c), \ldots, (c, c, c, c)\}$$ и т. д.

Согласно (23) для этих примеров имеем:

$$|A^1| = 3 = 3^1;$$
$$|A^2| = 3 \cdot 3 = 3^2;$$
$$|A^3| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3;$$
$$|A^4| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$ и т. д.

Отсюда видно, что множество A^1 содержит три кортежа, где каждый кортеж состоит из одного элемента и имеет длину, равную единице. Множество A^2 содержит 9 кортежей длины 2, множество A^3 состоит из 27 кортежей длины 3 и т. д.

В общем случае справедливо соотношение

$$|A^n| = |A|^n.$$

Если элементами множества A являются цифры 1, 2, …, k, то элементы множества A^n представляют собой n-значные кортежи. Например, при $k = 9$ и $n = 3$

$$A^3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), \ldots, (7, 2, 7), \ldots, (9, 9, 9)\},$$

т. е. элементами множества A^3 являются все трехзначные десятичные числа, не содержащие нулей. Всего существует $9^3 = 729$ таких чисел.

Упражнения

1. (ПА). Найдите $|A^4|$, если $A = \{3, 4, 5, 7, 8\}$.

2. (АЛ). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 1, 2, 3, 4?

3. (УХС). Найдите n, если $|A^n| = 2048$.

4. (ЦМП)! Найдите $|A|$, если $|A^n| = 243$. Найдите n.

5. (ВИГ). Найдите $|B\,(A)|$, если $|A^2| = 49$.

6. (ВИК). Известно, что $|B\,(A)| = 64$. Найдите $|A^3|$.

7. (МЫС). Найдите длину кортежа, если $A = \{2, 3\}$ и $|A^n| = 1024$.

2.3. Понятие бинарного отношения

Пусть дано декартово произведение двух непустых множеств A и B, при этом множества могут быть любыми: непересекающимися, равными, входящими одно в другое и т. д. Элементами множества $A \times B$ являются упорядоченные пары вида (a_i, b_j), где $a_i \in A$; $b_j \in B$; $i = 1, 2, \ldots, |A|$; $j = 1, 2, 3, \ldots, |B|$. Всякое подмножество декартова произведения $A \times B$ называется **бинарным отношением**, определенным на паре множеств A и B

[46, с. 20] (по латыни «бис» обозначает «дважды»). Термин «бинарное отношение» не является единственным, например, в [21; 24] используется название «диадическое отношение», в [16] — «двухместное отношение». А некоторые авторы произвольное подмножество множества $A\times B$ называют не отношением, а соответствием, используя термин «бинарное отношение» в более узком смысле [7, с. 16—17]. В общем случае по аналогии с бинарными можно рассматривать и *n*-арные отношения как упорядоченные последовательности *n* элементов, взятых по одному из *n* множеств.

Для обозначения бинарного отношения применяют знак *R*. Поскольку R — это подмножество множества $A\times B$, то можно записать $R\subseteq A\times B$ [46, с. 21]. Если же требуется указать, что $(a, b)\in R$, т. е. между элементами $a\in A$ и $b\in B$ существует отношение *R*, то пишут aRb. Пусть, например,

$$A = \{1, 2, 3\};\quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \qquad (24)$$

Множество $A\times B$ содержит 18 упорядоченных пар. Выделим на этом множестве отношение «больше»: $a > b$, где $a\in A$ и $b\in B$, тогда

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\},$$

т. е. из 18 пар множества $A\times B$ три упорядоченные пары принадлежат отношению aRb, где *R* обозначает слово «больше». Если вместо букв подставить их значения, то получим верные утверждения: $2 > 1$; $3 > 1$; $3 > 2$.

Очевидно, что в этом случае справедливо равенство:

$$aRb = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть *R* обозначает «меньше простого числа» на множествах (24). Тогда

$$aRb = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}.$$

Если вместо всех трех букв *a*, *R*, *b* подставить их значения, то получим шесть верных утверждений:

1 меньше простого числа 2;

1 меньше простого числа 3 и т. д.

При подстановке других значений *a* и *b* (но при том же *R*) будем получать ложные утверждения.

Среди подмножеств множества $A\times B$ имеется $2^{|A\times B|}-2$ собственных подмножеств и два несобственных: одно из них пусто, а второе совпадает с самим множеством $A\times B$. Формально оба эти несобственные подмножества также представляют собой некоторые отношения между элементами множеств *A* и *B*.

Многие авторы понятие бинарного отношения определяют через квадрат множества. Например, В.А. Горбатов пишет: «Бинарным отношением *T* в множестве *M* называется подмножество его квадрата: $T\subset M^2$» [14, с. 13].

На первый взгляд кажется, что определение В.А. Горбатова является частным случаем по отношению к вышерассмотренному. Но это неверно. Если *T* — подмножество декартова произведения $A\times B$, где *A* и *B* — произвольные множества, то подмножество *T* можно выделить и из квадрата множества *M*, где

$$M = A \cup B.$$

Пусть, например,

$$A = \{1, 2, 3, 4\};\quad B = \{a, b, c, e, f\}.$$

Выделим в множестве $A\times B$ отношение *T*: «четное число, гласная буква»:

$$T = \{(2, a), (4, a), (2, e), (4, e)\}. \qquad (25)$$

Объединим множества *A* и *B*: $M = A \cup B$. Очевидно, что в множестве M^2 отношение *T* будет иметь такой же вид, что и (25).

Задавать бинарные отношения можно разными способами. Один из них мы уже рассмотрели. Это использование правила, согласно которому указываются все элементы, входящие в данное отношение. Вместо правила можно привести список элементов заданного отношения путем непосредственного их перечисления. В [46, с. 20] указаны еще три способа задания отношений — табличный, в виде графов и с помощью сечений. Основу табличного способа составляет прямоугольная система координат, где по одной оси откладываются элементы одного множества, по второй — другого. Пересечения координат образуют точки, обозначающие элементы декартова произведения.

На рис. 27 изображена координатная сетка для множеств (24). Точкам пересечения трех вертикальных линий с шестью горизонтальными соответствуют элементы множества $A\times B$. Кружочками на сетке отмечены элементы отношения aRb, где $a\in A$ и $b\in B$, *R* обозначает отношение «делит».

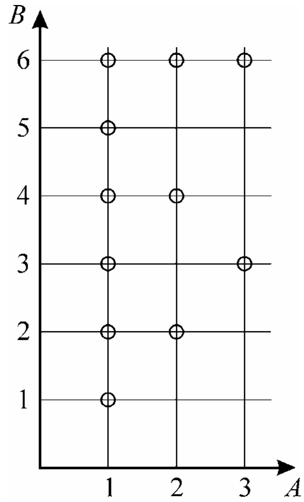


Рис. 27

Бинарные отношения задаются двухмерными системами координат. Очевидно, что все элементы декартова произведения трёх множеств аналогично могут быть представлены в трехмерной системе координат, четырёх множеств — в четырехмерной системе и т. д.

Для изложения второго способа представления отношений — в виде графов — необходимо привлечение таких понятий, как орграф, дуга, двудольный граф и др., в связи с чем данная тема перенесена в раздел «Теория графов».

Способ задания отношений с помощью сечений используется реже, поэтому рассматривать его не будем. При необходимости каждый желающий может ознакомиться с ним, обратившись к специальной литературе, например [46, с. 20].

Упражнения

1. (82Р). Найдите $|R|$, если *R* определено следующим образом: *x* делит *y* (без остатка); $x\in A$; $y\in B$, где

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\};\quad B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \qquad (26)$$

2. (ПХС). Найдите $|R|$, если *R* на паре множеств (26) определено следующим образом: $x < y$; где $x\in A$; $y\in B$.

3. (ФКТ). Определите $|aRb|$ для множеств (26), если *R* — это отношение: $a\in A$ — нечетное число; $b\in B$.

4. (38У). Определите $|aRb|$ для множеств (26), если *R* — это отношение: $a\in A$ — простое число; $b\in A\cup B$ — четное или простое число.

5. (ФОЕ). Найдите $|\overline{R}|$ для множеств (26), если *R* — отношение: $a = b$; где $a\in A$; $b\in B$.

6. (ДМХ). Найдите $|R|$, если *R* определено следующим образом: $x\in \overline{A}\cap B$; $y\in A\cap \overline{B}$, где

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\};\quad B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \qquad (27)$$

7. (415). Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения: $a - b = 2$, где $a \in A$; $b \in B$, A и B — множества (27):

1) 3, 1; 2) 6, 4; 3) 4, 6; 4) 5, 3; 5) 4, 2; 6) 7, 5; 7) 8, 6.

8. (ХАХ). Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения: $2a - b = 0$, где $a \in A$; $b \in B$, A и B — множества (27):

1) (4,2); 2) (1,2); 3) (4,8); 4) (3,6); 5) (6,12); 6) (2,4).

9. На множестве букв русского алфавита найдите элементы отношений T, R, S.

(УМ). Определите $|T|$, если T — множество двухбуквенных слогов, где первая буква согласная, а вторая — гласная.

(ТЮ). Определите $|R|$, если R — множество пар букв, где обе буквы различные.

(ХАФ). Определите $|S|$, если S — множество пар букв, где обе буквы гласные.

10. (КТС). На множестве A десятичных цифр определите $|R|$, если R — множество двухразрядных десятичных чисел, для которых справедливо: $x > y$; $x, y \in A$; x — цифра старшего разряда, y — цифра младшего разряда.

2.4. Симметрия отношений

Пусть дано множество M. Его квадратом является множество $M \times M = M^2$. Выделим в этом квадрате подмножество R, представляющее собой некоторое отношение. Всякое бинарное отношение R в множестве M может быть либо **симметричным**, либо **асимметричным**, либо **несимметричным** [24].

Пусть между элементами $a \in M$ и $b \in M$ имеется отношение R. Переставим местами a и b. Если отношение R сохранится, то такое отношение называется **симметричным**. Примером может служить отношение «быть братом»: если Костя брат Толи, то и Толя брат Кости.

Отношение называется **асимметричным**, если оно имеет место между элементами a и b, но отсутствует между элементами b и a. Пример асимметричного отношения: «находится в…». Если «книга находится в шкафу» — верное утверждение, то «шкаф находится в книге» — утверждение ложное.

Отношение называется **несимметричным**, если оно не является симметричным и не является асимметричным, то есть если имеет место отношение aRb, то отношение bRa может быть, но может и не быть. Пример — отношение «a увидел b»: если Саша увидел Игоря, то возможно, что и Игорь увидел Сашу, но мог и не увидеть.

Кроме симметричных, асимметричных и несимметричных отношений в математической литературе рассматривается еще один вид симметрии — **антисимметричность**. Если отношения aRb и bRa имеют место лишь при $a = b$, то отношение R называют **антисимметричным** [7, с.80; 14, с.16; 33, с.17; 46, с.38; 47, с.6]. Примером может служить отношение «меньше или равно». (В [2, с. 77] термин «антисимметричность» используется для обозначения асимметричности. В таком же смысле термин «антисимметричность» использован в [25, с.43; 38, с.65].)

Упражнения

1. (НА). Укажите симметричные отношения:
1) Таня — сестра Пети;
2) прямая A перпендикулярна прямой B;
3) город Томск расположен севернее города Новосибирска;
4) тетрадь находится в портфеле;
5) Зина — сестра Оли;
6) 25 + 10 = 15 + 20;
7) прямая A параллельна прямой B.

2. (ЕНУ). Укажите асимметричные отношения в упр. 1.

3. (ХВУ). Укажите асимметричные отношения:
1) я встретился со своим другом;
2) Иван пришел в гости к своему другу Петру;
3) дерево свалилось на дорогу;
4) Иванов проиграл в шахматы Петрову;
5) Андрей не проиграл в шашки Сергею;
6) Останкинская башня выше Эйфелевой башни;
7) Сидоров хорошо относится к Петрову;
8) масса плиты A не превышает массы плиты B.

4. (ООЗ). Укажите несимметричные отношения в упр. 3.

5. (323). Укажите симметричные отношения в упр. 3.

6. (ЕЛТ). Укажите несимметричные отношения:
1) Иван узнал Петра;
2) лесоруб спилил дерево;
3) столяр изготовил оконную раму;
4) Иванов поздоровался с Орловым;
5) олень увидел в зарослях тигра;
6) число a не больше числа b, где $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$;
7) число 325 содержит столько же цифр, что и число 891.

7. (881). Укажите антисимметричные отношения в упр. 6.

8. (ЯВЕ). В упр. 6 укажите асимметричные отношения.

9. (МОФ). В упр. 6 укажите симметричные отношения.

10. (152). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) существуют отношения, одновременно являющиеся асимметричными и несимметричными?

2) существуют отношения, не являющиеся симметричными и не являющиеся асимметричными?

3) если отношение асимметрично, то оно не является несимметричным?

4) если отношение не является симметричным, то оно либо асимметрично, либо несимметрично?

5) если отношение aRb симметрично, то оно останется симметричным при перестановке элементов a и b?

6) если отношение несимметрично, то оно не может быть асимметричным?

7) если отношение несимметрично, то оно одновременно является асимметричным?

2.5. Транзитивность отношений

Любое бинарное отношение R в множестве M является либо **транзитивным**, либо **интранзитивным**, либо **нетранзитивным** [21; 24].

Отношение R называется транзитивным, если из aRb и bRc следует aRc. Например, отношение «больше» на множестве положительных чисел является транзитивным, поскольку если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Отношение называется интранзитивным, если из aRb и bRc следует, что утверждение $a\,R\,c$ является ложным. Примером может служить отношение «больше на 4». Если «a на 4 больше b» и «b на 4 больше c», то утверждение «a на 4 больше c» ложно.

Отношение называется **нетранзитивным**, если оно не является транзитивным и не является интранзитивным, то есть если имеют место отношения aRb и bRc, то утверждение aRc может быть и истинным и ложным. Например, пусть «A знаком с B» и «B знаком с C», тогда относительно истинности утверждения «A знаком с C» ничего определенного сказать нельзя.

Упражнения

1. (РФО). Укажите транзитивные отношения:

1) равно;	5) меньше на 5;
2) больше или равно;	6) быть южнее;
3) не равно;	7) быть врагом;
4) быть другом;	8) быть логарифмом.

2. (А30). Укажите интранзитивные отношения в упр.1.

3. (220). Укажите нетранзитивные отношения в упр.1.

4. (ШМП). Укажите интранзитивные отношения:

1) квадратный корень;	5) равно половине;
2) старше, чем;	6) является предком;
3) больше в три раза;	7) является матерью;
4) дружит;	8) здоровается.

5. (С51). Укажите нетранзитивные отношения в упр.4.

6. (ФАФ). Укажите транзитивные отношения в упр. 4.

7. (581). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли отношение быть интранзитивным и нетранзитивным одновременно?

2) верно ли, что если отношение является нетранзитивным, то оно может быть транзитивным?

3) существуют ли отношения, которые не являются транзитивными, не являются интранзитивными и не являются нетранзитивными одновременно?

4) может ли отношение быть одновременно транзитивным и симметричным?

5) существуют ли отношения, не являющиеся транзитивными и не являющиеся симметричными одновременно?

6) верно ли, что если отношение нетранзитивно, то оно всегда несимметрично?

7) может ли асимметричное отношение быть интранзитивным?

2.6. Рефлексивность отношений

Отношение R в множестве M называется **рефлексивным**, если для всякого $a \in M$ утверждение aRa является истинным. Например, отношение параллельности прямых является рефлексивным, так как всякая прямая параллельна самой себе.

Отношение называется **антирефлексивным**, если ни один элемент $a \in M$ не находится в отношении R с самим собой [2, с. 75; 7, с. 80]. (В [43, с. 63] такие отношения называются **иррефлексивными**.) Например, отношение перпендикулярности прямых является антирефлексивным, поскольку всякая прямая не является перпендикулярной самой себе.

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Пусть, например, M — множество точек на плоскости. Рассмотрим отношение: «точка a симметрична точке b относительно прямой, лежащей в той же плоскости». Если точки лежат не на прямой, то утверждения aRa и bRb являются ложными. Но все точки, лежащие на прямой, симметричны сами себе. Следовательно, данное отношение не является рефлексивным и не является антирефлексивным.

Упражнения

1. (ЖЛВ). Укажите рефлексивные отношения:

1) Таня — сестра Зины;

2) $a \le b$, где a и b — натуральные числа;

3) $a \ne b$, где a и b — натуральные числа;

4) треугольник a подобен треугольнику b;

5) площадь круга a больше площади круга b;

6) Иван написал письмо Петру;

7) выражения a и b имеют одно и то же значение в множестве числовых выражений.

2. (ЛОЙ). Укажите транзитивные отношения в упр. 1.

3. (Р65). Укажите симметричные отношения в упр. 1.

4. (АЭЛ). Укажите рефлексивные отношения:

1) точка a удалена от точки b на 4 см;

2) по количеству жителей город A равен городу B;

3) дробь a равна дроби b в множестве дробей;

4) число a делится на b без остатка в множестве целых положительных чисел;

5) площадь фигуры a равна площади фигуры b в множестве геометрических фигур на плоскости;

6) числа a и b при делении на 5 дают одинаковые остатки;

7) $a - b \ne 0$, где $a, b \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$; $a - b$ — положительное число.

5. (Б37). Укажите симметричные отношения в упр. 4.

6. (БКМ). Укажите транзитивные отношения в упр. 4.

7. (697). Укажите рефлексивные отношения:

1) a похож на b (в множестве людей);

2) в книге a в два раза больше страниц, чем в книге b;

3) фраза a имеет тот же смысл, что и фраза b;

4) Петров и Сидоров имеют одинаковый рост;

5) дорога a имеет ту же длину, что и дорога b;

6) Смирнов и Васильев живут на третьем этаже;

7) поезд a идет быстрее, чем поезд b.

8. (ОПО). Укажите отношения, являющиеся одновременно транзитивными и рефлексивными:

1) число a равно числу b;

2) Иванов и Петров служат в одном полку;

3) a и b равновеликие треугольники;

4) число a не больше числа b;

5) тетрадь a дороже тетради b;

6) Афанасьев слушает Васильева;

7) Иванов дал книгу Петрову.

2.7. Отношения эквивалентности

Если отношение R в множестве M обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то оно называется **отношением эквивалентности**. Пусть M — множество студентов. Тогда отношение aRb, где $a, b \in M$, а R обозначает «быть однокурсником», является отношением эквивалентности, поскольку оно рефлексивно (студент является однокурсником по отношению к себе), симметрично (если a — однокурсник по отношению к b, то и b — однокурсник по отношению к a), транзитивно (если a — однокурсник по отношению к b, b — однокурсник по отношению к c, то a — однокурсник по отношению к c).

Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся **классы эквивалентности**. В рассмотренном примере отношение «быть однокурсником» разбивает все множество студентов на пять непересекающихся классов (при пятилетней системе обучения), где первый класс образуют все студенты первого курса, второй — второго курса и т. д. Множество всех классов эквивалентности образует **фактор-множество** M/R множества M, где M — исходное множество (в рассмотренном примере M — множество студентов всех курсов). Очевидно, что классы фактор-множества являются непересекающимися.

Упражнения

1. (УЛЭ). Укажите отношения эквивалентности:

1) быть попутчиком в одном вагоне пассажирского поезда;
2) $a + b = 100$, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 100\}$;
3) $a = b$, где $a, b \in \{1, 4, 8, 9\}$;
4) прямая a перпендикулярна прямой b;
5) треугольник a подобен треугольнику b;
6) Сидоров живет двумя этажами выше Михайлова;
7) a сердит на b.

2. (146). Укажите отношения эквивалентности:

1) Иванов задал вопрос Петрову;
2) книга a имеет такую же цену, что и книга b;
3) Смирнов попрощался с Федоровым;
4) Саша позвал в гости Игоря;
5) Павлов и Васильев смотрят один и тот же фильм;
6) высота горы a равна высоте горы b;
7) Федоров и Савин поступили в ТУСУР в одном и том же году.

3. (ЕЦЛ). Укажите отношения эквивалентности:

1) солдат Петров идет в ногу с солдатом Ивановым в одном и том же отряде;
2) Смирнов позвонил на работу Чичикову;
3) Павлов встретил на вокзале своего друга Васильева;
4) автомобиль «Москвич» едет по той же дороге, что и автомобиль «Жигули»;
5) автомобиль a столкнулся с автомобилем b;
6) Иванов прочитал книгу, написанную Соколовым;
7) Юра прилетел в Москву одновременно с Борисом.

4. (АПО). На множестве всех жителей 50 штатов США задано отношение: «a и b — жители одного и того же штата». Найдите $|M / R|$.

5. (42Р). Определите $|M / R|$, если на множестве M всех жителей пятиэтажного дома задано отношение: «a и b живут на одном и том же этаже».

6. (ЖБК). Укажите номера свойств, которыми обладает отношение сравнимости целых чисел по модулю натурального числа:

1) асимметричность;
2) несимметричность;
3) транзитивность;
4) нетранзитивность;
5) рефлексивность;
6) симметричность;
7) интранзитивность.

2.8. Отношения строгого порядка

Если элементы некоторого множества мы располагаем в определенном порядке, то сначала выбираем первый элемент, затем второй и т. д., т. е., в сущности, как сказано в [7, с. 46], элементы множества упорядочены, если они каким-либо образом пронумерованы. Очевидно, что в этом случае между элементами существует отношение «следовать за»: a следует за b. Отношение следования обладает свойством транзитивности (если a следует за b, а b следует за c, то a следует за c), но является асимметричным (если a следует за b, то b не может следовать за a) и не является рефлексивным (элемент a не может следовать за самим собой).

Если отношение R в множестве M является транзитивным и асимметричным и не является рефлексивным, то оно называется **отношением строгого порядка**. Примером может служить отношение «a больше b» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Упражнения

1. (22Р). Укажите отношения строгого порядка:

1) Иванов выше Сидорова;
2) Лена — сестра Наташи;
3) отрезок a короче отрезка b;
4) отрезок a длиннее отрезка b на 2 см;
5) Васильев знает Петрова;
6) Иванов живет этажом выше Соколова;
7) лыжник Ухин бежит непосредственно за Ивиным.

2. (43Р). Укажите отношения строгого порядка:

1) число a непосредственно следует за числом b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
2) число a на 4 больше числа b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
3) между числами a и b находится точно одно число ($a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$);
4) число a равно числу b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
5) число a следует за числом b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
6) число a больше в два раза числа b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 20\}$;
7) Саша старше Димы.

3. (ОХШ). Найдите $|aRb|$, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, если R — отношение «меньше».

2.9. Отношения нестрогого порядка

Если отношение R в множестве M рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется **отношением нестрогого порядка** [46, с. 38] (используются также термины: «отношение частичного порядка» [19; 30; 33], «отношение квазипорядка» [24], «отношение неполного порядка» [2, с.85]). Например, отношение «не больше» на множестве натуральных чисел является отношением нестрогого порядка: $a \le b$, так как оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Это отношение представляет собой объединение двух отношений R_1 и R_2, где R_1 — асимметричное отношение «меньше»; R_2 — отношение «равно»:

$$R = R_1 \cup R_2 = a\,R_1\,b \cup a\,R_2\,b.$$

Если $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$, то

$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

Упражнения

1. (СПИ). Укажите отношения нестрогого порядка:

1) автомобиль a едет быстрее автомобиля b;
2) число a не меньше числа b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 50\}$;
3) числа a и b не равны числу 6, где a и b — натуральные числа;
4) число a без остатка делится на число b, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
5) $a > 5$ и $b > 5$, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 8\}$;
6) Петров и Иванов — друзья;
7) угол α не больше угла β.

2. (ВУУ). Укажите отношения нестрогого порядка:

1) числа a и b не являются двузначными;
2) точка a на числовой оси находится левее точки b;
3) самолет a летит не быстрее самолета b;
4) расстояние между городами равно 100 км;
5) дом a не выше дома b;
6) отрезок a не короче отрезка b;
7) хорошее лучше плохого.

2.10. Упорядоченные множества

Согласно [46, с. 39] множество M называется **линейно упорядоченным**, если для любых двух его элементов a и b имеет место либо только aRb, либо только bRa.

Если же отношение aRb (либо bRa) справедливо не для любых элементов $a, b \in M$, то множество M называется **частично упорядоченным**.

Пример 1. Пусть $M = \{1, 3, 4, 7\}$. Рассмотрим отношение aRb, где R обозначает «меньше»:

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (1, 7), (3, 4), (3, 7), (4, 7)\}.$$

Для каждого элемента множества R справедливо $a < b$, следовательно, отношение $a < b$ в множестве M есть отношение линейного порядка. Говорят, что отношение $a < b$ множество M упорядочивает линейно.

Пример 2. Пусть $M = \{c, d, e, f\}$. Тогда отношение $P \subset Q$ есть отношение **частичного порядка** в булеане $B(M)$, где P и Q — подмножества множества M. Чтобы убедиться в этом, запишем булеан $B(M)$:

$$B(M) = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}, \{c, d, e, f\}\}.$$

По этой записи видно, что существуют элементы булеана, для которых справедливо отношение $P \subset Q$, где $P, Q \in B(M)$. Например:

$$\varnothing \subset \{c\}; \quad \{d\} \subset \{c, d\}; \quad \{e, f\} \subset \{d, e, f\} \text{ и т. д.}$$

Но не для всяких $P, Q \in B(M)$ отношение $P \subset Q$ справедливо. Например:

$$\{c\} \not\subset \{f\}; \quad \{d\} \not\subset \{c, e\}; \quad \{c, f\} \not\subset \{d, f\} \text{ и т. д.}$$

Следовательно, отношение включения $P \subset Q$ упорядочивает булеан $B(M)$ частично.

Упражнения

1. Пусть $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(УЖУ). Определите $|K|$, где K — множество подмножеств, кардинальное число которых равно двум.

2. Сколько существует пар элементов $a, b \in M$ (см. упр. 1), для которых справедливо отношение:

(ООТ). $a < b$? (МОР). $a > b$? (ЕКТ). $a \geq b$? (ЗКР). $a \leq b$?

3. (781). Укажите, в каких случаях отношения упорядочивают множества линейно?

1) «a выше, чем b», где $a, b \in$ {рост Петрова — 180 см, Сидорова — 175 см, Данилова — 174 см, Орлова — 171 см, Васильева — 176 см};

2) «a ниже, чем b», где $a, b \in$ {рост Николаева — 168 см, Иванова — 170 см, Алексеева — 178 см, Афанасьева — 170 см, Владимирова — 172 см};

3) «a делитель b», где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

4) «a длиннее b», где a, b — элементы множества отрезков различной длины;

5) «a находится левее b на числовой оси», где a и b — натуральные числа;

6) «a едет быстрее b», где a и b — элементы множества автомобилей, движущихся по дороге;

7) «a знаком с b», где $a, b \in N$; N — множество учащихся школы.

2.11. Отношения соответствия

Понятие соответствия ясно интуитивно. Например, если требуется закодировать сообщение заменой букв алфавита их порядковыми номерами, то каждой букве необходимо поставить в соответствие определенное десятичное число. Если в кассе кинотеатра продают билеты на какой-либо сеанс, это значит, что каждому билету соответствует определенное место в зрительном зале. Если цветные карандаши упаковывают в коробки, то каждому набору цветных карандашей соответствует некоторая коробка, и т. д. Этот интуитивно ясный смысл вкладывается в слово «соответствие» и в том случае, когда говорят о каких-либо двух множествах.

В общем случае между элементами множеств A и B могут быть четыре вида соответствия в зависимости от того, один или несколько элементов множества A соответствуют элементу множества B и один или несколько элементов множества B ставятся в соответствие элементу множества A [21, с. 141; 24, с. 404]:

1) **взаимно однозначное соответствие**, когда каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$ и когда каждому элементу $b \in B$ соответствует только один элемент $a \in A$. Например, если 33 буквы русского алфавита пронумеровать, то получим два множества $A = \{А, Б, В, \ldots, Ю, Я\}$ и $B = \{1, 2, 3, \ldots, 32, 33\}$, между которыми существует взаимно однозначное соответствие. Взаимно однозначные соответствия называют **биективными отображениями**, или **биекциями** [46, с. 29].

2) **одно-многозначное соответствие**, когда каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие несколько (более одного) элементов множества B, но каждому элементу $b \in B$ соответствует только один элемент $a \in A$. Примером может служить отношение: «a есть квадрат b». Пусть $A = \{1, 4, 9\}$, $B = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$. Тогда элементу $1 \in A$ ставится в соответствие два элемента $1 \in B$ и $-1 \in B$, поскольку $1 = 1^2$ и $1 = (-1)^2$. То же самое относится и к элементам $4 \in A$ и $9 \in A$;

3) **много-однозначное соответствие**, когда для каждого элемента $a \in A$ существует только один элемент $b \in B$, но каждому элементу множества B соответствует более одного элемента множества A. Примером может служить отношение «быть квадратным корнем», то есть «a есть квадратный корень числа b». Пусть $A = \{1, 2, 3, -1, -2, -3\}$ и $B = \{1, 4, 9\}$. Тогда двум элементам 1 и –1 множества A соответствует один элемент $1 \in B$, так как квадратным корнем из 1 является и 1 и –1. То же самое относится и к остальным элементам множеств A и B;

4) **много-многозначное соответствие**, когда каждому элементу $a \in A$ соответствует более одного элемента множества B и каждому элементу $b \in B$ соответствует также более одного элемента множества A. Примером много-многозначного соответствия может служить отношение вида «a не равно b», т. е. «$a \neq b$». Допустим, что $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда элементу $1 \in A$ соответствуют элементы $2, 3, 4, 5 \in B$, элементу $2 \in A$ — $3, 4, 5 \in B$, элементу $3 \in A$ — $2, 4, 5 \in B$. Аналогично: элементу $2 \in B$ соответствуют элементы $1, 3 \in A$, элементу $3 \in B$ — $1, 2 \in A$, элементу $4 \in B$ — $1, 2, 3 \in A$, элементу $5 \in B$ — $1, 2, 3 \in A$.

Упражнения

1. (219). Даны множества: $A = \{a, \alpha, \beta, t, m\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Каждой букве множества A поставили в соответствие некоторую цифру множества B, т. е. буквы пронумеровали. Сколько существует способов установления этого соответствия?

2. (300). Укажите номера взаимно однозначных отношений:

1) «$a \in A$ на 4 больше, чем $b \in B$», где A — множество всех целых чисел; $A = B$;

2) «$a \in A$ есть делитель $b \in B$», где
$A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{4, 8, 9, 25, 27, 125\}$;

3) «пассажир $a \in A$ едет в вагоне $b \in B$», где A — множество пассажиров поезда; B — множество вагонов; $|B| > 1$; в каждом вагоне более одного пассажира;

4) «$a \in A$ слушает лекцию в аудитории $b \in B$», где A — множество студентов; B — множество аудиторий; $|B| > 1$; в каждой аудитории более одного студента;

5) «$2a \neq 3b$», где $a, b \in \{1, 2, 3\}$;

6) «$a - b = 0$», где a и b — натуральные числа;

7) «$a \geq b$», где $a \in \{6, 7, 9\}$; $b \in \{3, 4\}$;

8) «$a + b$ — нечетное число», где $a \in \{2, 3, 4, 5\}$; $b \in \{6, 7, 8, 9\}$;

9) «скрипка $a \in A$ находится в футляре $b \in B$, где A — множество скрипок, B — множество футляров.

3. (258). В упр. 2 укажите номера одно-многозначных отношений.

4. (ПО7). В упр. 2 укажите номера много-однозначных отношений.

5. (ЯЛК). В упр. 2 укажите номера много-многозначных отношений.

2.12. Функциональные отношения. Отображения

Пусть даны множества X и Y. Бинарное отношение $x\,R\,y$ является **функциональным** (**функцией**), если каждому элементу $x \in X$ соответствует не более одного элемента $y \in Y$ [14, с. 8; 46, с. 26]. Из этого определения следует, что одно-многозначные и много-многозначные отношения функциональными быть не могут.

Для обозначения функции используются различные записи: $X \xrightarrow{f} Y$, $f: X \to Y$ [43, с. 51]; $f(x)$ [46, с. 28]; $(x, y) \in F$, $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$ [14, с. 8]. В [46, с. 27] зна-чение функции $y \in Y$ называют образом элемента $x \in X$, а сам элемент $x \in X$ — прообразом. Множество X — это область определения функции, Y — область значений.

Функция $y = F(x)$ называется **всюду определенной**, если каждому элементу $x \in X$ соответствует один элемент $y \in Y$. В этом случае функцию называют также **отображением** (или **инъекцией**) множества X в множест-во Y [46, с. 27]. Функция является **недоопределенной** (**частично определенной**), если имеется хотя бы один элемент $x \in X$, которому не соответствует никакой эле-мент $y \in Y$. Отсюда следует, что недоопределенные функции отображениями не являются. Однако не все математики придерживаются этого положения. Напри-мер, Бурбаки считает, что функция и отображение — это полные синонимы [46, с. 27]. (Никола Бурбаки — не один человек. Это псевдоним, под которым группа фран-цузских математиков в 1939 г. предприняла попытку изложить различные математические теории с позиций формального аксиоматического метода. Численность и состав группы содержатся в тайне [24, с. 76; 42, с. 172].)

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть даны два множества:

$$X = \{a, б, в, г, д, е\}; \quad Y = \{1, 2, 3, 4\}. \tag{28}$$

Выделим в множестве $X \times Y$ подмножество вида

$$F = \{(a, 1), (б, 3), (в, 4), (г, 2), (д, 2), (е, 3)\}.$$

Первый элемент каждой пары множества F — это элемент множества X, второй — элемент множества Y. Все первые элементы различны, следовательно, каждому значению $x \in X$ соответствует точно один элемент $y \in Y$. Это значит, что множество F представляет собой функциональное отношение и, следовательно, является отображением множества X в множество Y.

Пример 2. Выделим в декартовом произведении множеств (28) множество вида

$$M = \{(a, 1), (a, 2), (б, 3), (в, 4), (г, 3), (д, 2), (е, 4)\}.$$

В это множество входят пары $(a, 1)$ и $(a, 2)$, у которых первые элементы одинаковы. Что это значит? Очевидно, то, что элементу $a \in X$ соответствуют два элемента множества Y: $1 \in Y$ и $2 \in Y$. Но по определению функционального отношения каждому элементу множества X может соответствовать не более одного элемента множества Y. Следовательно, отношение, представленное множеством M, не является функцией.

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, б, в\}$ и пусть отношение F имеет вид «буквам русского алфавита ставятся в соответствие их порядковые номера», т. е.

$$F = \{(1, a), (2, б), (3, в)\}. \tag{29}$$

Элементу $4 \in X$ в множестве Y не соответствует никакой элемент, следовательно, отношение (29) есть неполностью определенная функция. Расширим область определения функции, заменив множество $\{a, б, в\}$ множеством $\{a, б, в, г\}$, тогда получим

$$F = \{(1, a), (2, б), (3, в), (4, 2)\}.$$

Теперь функция является всюду определенной.

Пример 4. Пусть дано выражение

$$y = \sqrt{x}\,. \tag{30}$$

Известно, что, например, $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{9} = -3$, так как $3^2 = 9$ и $(-3)^2 = 9$, т. е. одному и тому же значению x соответствуют два различных значения y. Следовательно, по определению выражение (30) функцией не является. Если же ограничиться только неотрицательными числами, то выражение (30) является функцией с областью определения и областью значений в множестве неотрицательных чисел.

Таким образом, понятие функционального отношения в теории множеств является обобщением известного из курса школьной математики понятия функции и распространяется не только на числовые множества, но и на объекты, не являющиеся числовыми.

Упражнения

1. (НАТ). Чему равно значение функции $y = 3x^2 - 7$, если значение аргумента равно трем?

2. Дано: $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Функция y задана следующим образом:

$y = 1$, если $x \in X$ — четное число;
$y = 2$, если $x \in X$ — нечетное число.

(УУТ). Определите область значений функции y.

(МЕТ). Определите область определения функции y.

3. (САД). Дано: $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите функциональные отношения:

1) $F = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5)\}$;
2) $F = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}$;
3) $F = \{(3, 1), (4, 5), (1, 5), (2, 2), (5, 3)\}$;
4) $F = \{(5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2)\}$;
5) $F = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$;
6) $F = \{(2, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$.

4. (АШУ). В предыдущем упражнении укажите номера отношений, которым соответствуют неполностью определенные функции.

2.13. Реляционная алгебра

Объектами, над которыми в реляционной (лат. *relatio* — сообщение) алгебре выполняются операции, являются n-арные отношения. Так как отношения — это множества, то над ними можно выполнять теоретико-множественные операции, такие, как объединение, пересечение, разность (в [25] они называются соответственно сложение, умножение и вычитание), симметрическая разность и дополнение. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 1. Пусть даны бинарные отношения:

$$P = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 3)\};$$
$$Q = \{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\},$$

являющиеся подмножествами множества $A \times A = A^2$, где $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Объединение множеств P и Q образуют все пары, входящие в эти множества:

$$P \bigcup Q = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,3)\}.$$

Пересечение множеств P и Q — это множество, элементы которого входят одновременно в оба множества:

$$P \bigcap Q = \{(1, 3), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Разность множеств $P \setminus Q$ имеет вид

$$P \setminus Q = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

Аналогично находим: $Q \setminus P = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Симметрическая разность множеств $P \oplus Q$:

$$P \oplus Q = (P \setminus Q) \bigcup (Q \setminus P) = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Для нахождения дополнений множеств P и Q сначала необходимо определить универсальное множество I. Так как $|A^2| = 16$, то универсальное множество I содержит 16 элементов:

$$I = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Следовательно:

$$\overline{P} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\};$$
$$\overline{Q} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}.$$

В реляционной алгебре кроме теоретико-множественных используются и другие операции. Рассмотрим некоторые их них.

Обмен позициями [25, с. 44]. Пусть n-арное отношение представлено множеством F кортежей длины n. Пронумеруем все элементы, входящие в кортеж. Суть операции обмена позициями, обозначаемой $(i \leftrightarrow j)\,F$, заключается в том, что знаки, стоящие в одном и том же кортеже на местах i и j, меняются местами ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$). Эта операция выполняется над всеми кортежами множества F.

Пример 2. Рассмотрим отношение вида

$$F = \{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1)\},$$

являющееся подмножеством множества A^5, где $A = \{0, 1\}$. В множестве F три кортежа. Применим к ним операцию обмена позициями, приняв $i = 3$, $j = 5$. Тогда получим новое отношение

$$(3 \leftrightarrow 5)\,F = \{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0)\},$$

не совпадающее с F. Очевидно, что если к множеству $(3 \leftrightarrow 5)\,F$ снова применить ту же операцию при $i = 3$, $j = 5$, то получим множество F.

Расширение отношения. Эта операция имеет обозначение $\nabla_a\,F$, где F — множество кортежей длины n, a —некоторый элемент, записываемый слева в каждый кортеж множества F. В результате получится новое множество с тем же числом кортежей, но длина каждого кортежа равна $n + 1$.

Пример 3. Пусть $F = \{(a, b, c), (a, b, b), (b, b, b)\}$. Возьмем в качестве элемента a цифру 6. Тогда

$$R = \nabla_6\,F = \{(6, a, b, c), (6, a, b, b), (6, b, b, b)\}.$$

Если операцию расширения отношения применить к двум множествам F и T, используя в качестве элемента a эти же символы F и T, а затем выполнить операцию объединения двух получившихся множеств, то получим новое отношение Q, представляющее собой композицию отношений F и T:

$$Q = (\nabla_F\,F) \bigcup (\nabla_T\,T).$$

Исключение позиции. (В [25] эта операция названа проекцией отношения.) Обозначение этой операции имеет вид $(i, j, \ldots, k)\,F$, где $i, j, \ldots, k$ — номера позиций кортежа, из которых удаляются элементы. Эту операцию применяют ко всем кортежам множества F. В результате длина каждого кортежа уменьшится и могут появиться повторы одних и тех же укороченных кортежей. Повторы необходимо удалить. Тогда останется мно-жество, являющееся результатом операции исключения позиции.

Пример 4. Исключив 2-й и 4-й элементы в каждом кортеже множества

$$F = \{(a, b, b, c, d), (a, a, b, c, d), (a, c, c, c, d)\}$$

получим новое множество

$$M = (2, 4)\,F = \{(a, b, d), (a, c, d)\}$$

Удвоение позиции. Пусть F — множество кортежей длины n. Выберем j-ю позицию какого-либо кортежа и повторно запишем находящийся в этой позиции элемент в заранее указанное место в том же кортеже. Тем самым мы выполним операцию удвоения позиции. Условное обозначение этой операции имеет вид $D_j\,F$. Выполняется она для каждого кортежа множества F.

Пример 5. Рассмотрим отношение вида

$$F = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (5, 6, 8), (4, 5, 7)\}.$$

Допустим, что j-й элемент повторно записывается в каждый кортеж справа. Пусть $j = 2$, тогда

$$D_2F = \{(1, 3, 4, 3), (1, 3, 5, 3), (5, 6, 8, 6), (4, 5, 7, 5)\}.$$

Рассмотренных операций достаточно для того, чтобы получить представление о том, что является объектом изучения в реляционной алгебре. С другими операциями этой алгебры можно ознакомиться, обратившись к специальной литературе. Например, в [14, с. 29] рассмотрена операция конкатенации (расширенного декартова произведения двух отношений). В [25] описаны такие операции, как свертка двух отношений, отождествление позиций, ограничение предикатом, преобразование отношений с помощью функций и др.

Упражнения

1. Дано множество $A = (1, 2, 3, 4, 5\}$. На его основе заданы отношения в виде множеств P и Q:

$$P = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\} \subset A^2;$$
$$Q = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\} \subset A^2.$$

(БЭС)! Сколько элементов содержит: объединение множеств P и Q? Пересечение множеств P и Q?

(ТХС)! Сколько элементов содержат множества: $P \setminus Q$? $Q \setminus P$? $P \oplus Q$?

(РРР)! Сколько элементов во множестве: $\overline{P}$? $\overline{Q}$?

2. (ПХР). Отношение F состоит из одного кортежа, представляющего собой пятизначное двоичное число:

$$F = \{(0, 0, 1, 1, 0)\}.$$

К этому отношению три раза применили операцию обмена позициями: сначала $(2 \leftrightarrow 3)\,F$, к получившемуся новому отношению — $(1 \leftrightarrow 4)\,F$, после чего — $(2 \leftrightarrow 5)\,F$. Укажите кортеж, получившийся в результате (запятые не вводить).

3. (БОР)! Дано отношение

$$F = \{(3, 3, 4, 5, 5, 6), (3, 3, 5, 5, 5, 5), (3, 4, 5, 5, 5, 6)\}.$$

Примените к нему операцию исключения позиции вида (2, 3, 6) F. Сколько кортежей в новом отношении? Какие элементы в него входят?

4. (ЖУР). Отношение F задано в виде

$$F = \{(4, 4, 5), (1, 0, 1), (2, 0, 0)\}.$$

Примените к нему операцию удвоения позиции D_1F, записывая повторный элемент справа в каждый кортеж. Укажите все элементы, из которых состоит каждый кортеж нового отношения (запятые не вводить).

5. (ЗУЛ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли n-арное отношение содержать кортежи различной длины?

2) может ли измениться число кортежей в множестве F, если к нему применить операцию обмена позициями?

3) может ли получиться пустое множество в результате применения операции исключения позиции?

4) верно ли, что если операцию удвоения позиции последовательно применять к одному и тому же отношению, то кортежи с каждым применением этой позиции будут удлиняться?

5) возможны ли случаи, когда в результате применения операции обмена позициями множество F остается неизменным?

6) возможны ли случаи, когда в результате применения операции расширения отношения множество F остается неизменным?

7) применима ли операция исключения позиции к синглетону, представляющему собой кортеж из одного элемента?

3. БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

3.1. Вводные замечания

Того, кто начинает изучать теорию бесконечных множеств, ожидают настолько удивительные факты, что приобретенный жизненный опыт вполне может заявить протест против ее утверждений, которые с позиции здравого смысла покажутся попросту нелепыми. Сам Георг Кантор, случалось, приходил в изумление от результатов своих исследований, настолько они не соответствовали его интуитивным представлениям.

Существует два подхода к понятию бесконечности. Основой первого является **актуальная бесконечность**, второго — **потенциальная**. В первом случае бесконечность рассматривается как множество, содержащее бесконечно много элементов, но при этом предполагается, что оно задано в готовом, сформированном виде и его можно представить как некоторый объект. Именно так представлял себе бесконечное множество Г. Кантор. Потенциальная же бесконечность рассматривается не как нечто завершенное, а как процесс, у которого нет последнего шага, как процесс непрерывного увеличения числа элементов [24, с. 25, 463]. Нам при дальнейшем изложении материала не потребуется учитывать особенности этих подходов, вполне достаточно представления о бесконечности как о множестве, число элементов которого больше любого наперед заданного числа. (Лишь при выполнении упражнений подраздела 3.10 придется основательно вникнуть в понятия актуальной и потенциальной бесконечности.)

В подразделе 1.1 сказано, что конечное множество в общем случае может быть задано двумя способами — прямым перечислением и описанием свойств его элементов. В случае бесконечных множеств прямое перечисление элементов исключено, поэтому задавать их можно только описанием признаков, характерных для элементов данного множества. Например:

$A = \{x\,/\,x$ — натуральное число, $x > 1$, x — число, делящееся только на себя и на единицу$\}$.

Согласно этой записи элементами множества A являются простые числа, причем количество их не ограничено, вследствие чего множество A надо считать бесконечным (поскольку доказано, что количество простых чисел бесконечно велико).

В теории бесконечных множеств широко используются понятия **натурального числа** и **натурального ряда**. Однако необходимо отметить, что в математической литературе нет однозначности в определении натурального числа [46, с. 43]. Например, в [24, с. 375] говорится: «0 является натуральным числом». В [42, с. 863] читаем: «Натуральные числа — числа, возникающие в процессе простого счета, целые положительные числа 1, 2, 3, …». Из этих утверждений следует, что одни математики включают число 0 в множество натуральных чисел, а другие — не включают. В дальнейшем во избежание неопределенности будем считать, что число 0 натуральным не является и что натуральный ряд начинается с единицы: 1, 2, 3, 4, 5, …

Свойства конечных множеств хорошо согласуются с нашей интуицией и приобретенным опытом. Например, нам кажется совершенно очевидным, что всякое собственное подмножество любого конечного множества A не является эквивалентным множеству A. В случае сомнений можно поставить «эксперимент» — взять какое-либо множество, перечислить все его собственные подмножества, для каждого подмножества найти кардинальное число и сравнить его с числом $|A|$. Если не обнаружится ни одного случая равенства сравниваемых кардинальных чисел, то мы получим экспериментальное подтверждение того, что среди подмножеств данного множества A нет ни одного эквивалентного ему подмножества.

Иное дело, когда мы переходим к бесконечным множествам. Никакого эксперимента здесь поставить не удастся. При изучении бесконечных множеств нашим инструментом могут служить только правильные логические рассуждения, и если результаты рассуждений придут в противоречие со здравым смыслом, то нам придется выполнить определенную психологическую работу, принимая истинным то, что интуитивно кажется ложным.

3.2. Сравнение бесконечных множеств

Как сравнивать бесконечные множества? Например, очевидно, что простых чисел гораздо меньше, чем, допустим, нечетных, поскольку все простые числа нечетны (за исключением числа 2), но существует бесконечно много нечетных чисел, не являющихся простыми. Верно ли это утверждение? Чтобы доказать его справедливость (или ложность), множества необходимо как-то сравнить.

В случае сравнения конечных множеств A и B достаточно знать их кардинальные числа. Если по тем или иным причинам нахождение кардинальных чисел связано с какими-либо трудностями, то можно выяснить, нет ли между элементами множеств A и B взаимно однозначного соответствия. Например, какое множество больше — множество A кресел в зале театра или множество B зрителей в этом зале? Для ответа на данный вопрос нет необходимости находить числа $|A|$ и $|B|$. Если все кресла заняты, в проходах нет ни одного зрителя и каждое кресло занимает только один зритель, то ясно, что между множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, а это, в свою очередь, доказывает, что $|A| = |B|$, т. е. множества A и B эквивалентны.

Так как понятие взаимно однозначного соответствия позволяет определить, являются ли заданные множества эквивалентными, то Г. Кантор предложил распространить это понятие и на бесконечные множества: если найдется способ показать, что каждому элементу бесконечного множества A соответствует вполне определенный элемент бесконечного множества B и каждому элементу множества B соответствует вполне определенный элемент бесконечного множества A, то бесконечные множества A и B являются эквивалентными. Если же взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B не установлено, то нет оснований считать, что эти множества эквивалентны.

Например, пусть A — множество всех натуральных чисел, делящихся без остатка на 50, B — множество всех четных натуральных чисел. Эквивалентны ли эти множества?

Представим множества A и B в виде (еще раз напомним: число 0 не является натуральным):

$$A = \{50, 100, 150, 200, 250, \dots\};$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

По этим записям видно, что множество A составляет часть элементов множества B, т. е. является его подмножеством: $A \subset B$. Но с другой стороны, если числа — элементы множеств A и B — записать в порядке возрастания, то эквивалентность множеств устанавливается очень легко, так как между их элементами хорошо просматривается взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{rcccccl} A = \{ & 50, & 100, & 150, & 200, & 250, & \dots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \dots\}. \end{array}$$

Элементу $2 \in B$ соответствует элемент $50 \in A$, элементу $4 \in B$ соответствует элемент $100 \in A$ и т. д. Следовательно, множества A и B эквивалентны. Говоря языком конечных множеств, четных натуральных чисел столько же, сколько натуральных чисел, делящихся без остатка на 50. Таким образом, положение «часть меньше целого», справедливое для конечных множеств, в случае бесконечных множеств перестает быть безусловно верным. Нашему сознанию, воспитанному на догмах конечных множеств, кажется противоестественной мысль, что существует огромный класс множеств, для которых положение «часть равна целому» является истиной, и приходится затрачивать значительные усилия, чтобы психологически с этим согласиться. Впрочем, подобные случаи в науке — не редкость. Достаточно вспомнить, что кванты света — это одновременно и частицы и волны, что с возрастанием скорости тела увеличивается его масса (по теории относительности А. Эйнштейна), что не Солнце вращается вокруг Земли, а, вопреки очевидному, Земля вращается вокруг Солнца, что Земля не плоская, а (также вопреки очевидному) шарообразная и др. Во всех этих случаях освоение истины сопровождалось преодолением психологического сопротивления.

Важной характеристикой конечного множества является понятие кардинального числа. Аналогичную характеристику Г. Кантор предложил и для бесконечных множеств, введя понятие **мощности** множества. Представление о содержании этого понятия можно получить из следующего утверждения. Два бесконечных множества A и B имеют одну и ту же мощность, если между их элементами существует взаимно однозначное соответствие [46, с. 45; 10, с. 366]. Очевидно, что для конечных множеств кардинальное число и мощность — одно и то же.

Понятие взаимно однозначного соответствия было введено до Г. Кантора чешским ученым Б. Больцано. Однако, обнаружив трудности, к которым вело это понятие в случае бесконечных множеств, он отступил. Поэтому все понятия и определения теории множеств связывают только с именем Г. Кантора, хотя и не всегда справедливо.

В начале данного подраздела сформулирован вопрос, являются ли эквивалентными множество A простых чисел и множество B нечетных чисел. Теперь ответить на этот вопрос легко.

Запишем в порядке возрастания простые числа и каждому из них поставим в соответствие элемент из множества B следующим образом:

$$\begin{array}{rcccccccl} A = \{ & 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & \dots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = \{ & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & \dots\}, \end{array}$$

откуда видно, что между элементами множеств A и B существует взаимно однозначное соответствие и, следовательно, множества A и B эквивалентны.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Пусть даны два множества:

$N = \{x \,/\, x$ — натуральное число$\}$;

$M = \{ x \,/\, x \geq 8$, x — натуральное число$\}$.

Являются ли эти множества эквивалентными?

В множестве M отсутствует семь элементов, которые есть в множестве N. Остальные числа 8, 9, 10, 11, 12, … являются элементами обоих множеств. Следовательно, $M \subset N$, т. е. множество M является подмножеством множества N. Чтобы выяснить, эквивалентны ли эти множества, запишем их элементы один под другим:

$$\begin{array}{rcccccl} N = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ M = \{ & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & \dots\}. \end{array}$$

Между элементами хорошо просматривается взаимно однозначное соответствие, следовательно, множества A и B равномощны, т. е. эквивалентны.

Пример 2. Найти элементы множества $N \cap \overline{M}$, где M и N — множества, указанные в примере 1.

Очевидно, что множество $N \cap \overline{M}$ образуют те числа множества N, которые отсутствуют в множестве M, т. е.

$$N \cap \overline{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Упражнения

1. Укажите элементы множества $A \cap \overline{B}$, если:

(ЯШО). $A = \{x \,/\, x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,
$B = \{x \,/\, x = 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$;

(ЗАМ). $A = \{x \,/\, x > 28$, x — натуральное число$\}$,
$B = \{x \,/\, x \geq 30$, x — натуральное число$\}$;

(ТОН). $A = \{x \,/\, x = n^2$, n — натуральное число$\}$,
$B = \{x \,/\, x$ — натуральное число, $x > 9\}$.

2. (КИЛ). Укажите элементы множества $A \cap B$, если:

$A = \{x \,/\, x > 10$, x — натуральное число$\}$;
$B = \{x \,/\, x \leq 14$, x — натуральное число$\}$.

3. (236). Укажите номера множеств, являющихся бесконечными:

1) $A = \{x \,/\, x < 100$, x — натуральное число$\}$;

2) $B = \{x \,/\, x < 100$, x — целое отрицательное число$\}$;

3) $C = \{x \,/\, 20 < x \leq 120$, x — целое неотрицательное число$\}$;

4) $D = \{x \,/\, x = n^n$, n — натуральное число$\}$;

5) $E = \{x \,/\, x$ — число, при котором выполняется равенство $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2\}$;

6) $F = \{x \,/\, x$ — число, при котором выполняется равенство $x^2 = 2x\}$;

7) $K = \{x \,/\, x = n^{1000}$, n — натуральное число, $n < 1000\}$.

4. (303). В упр. 3 укажите номера множеств, эквивалентных множеству $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$.

5. (723). Укажите номера множеств, эквивалентных множеству натуральных чисел (см. упр. 3):

1) $A \bigcup B \bigcup K$;	5) $D \bigcap E \bigcup B$;
2) $B \bigcup E \bigcup F$;	6) $C \bigcap D \bigcup E \bigcap F$;
3) $C \bigcup F \bigcup K$;	7) $F \bigcup K \bigcup A \bigcap D$;
4) $C \bigcap D \bigcap F$;	8) $D \bigcap E \bigcup C$.

6. (05Р). Найдите элементы множества $A \bigcap D$ (упр. 3).

7. (ОЯР). Найдите кардинальное число множества $A \bigcap E$ (см. упр. 3).

3.3. Счетные множества

Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется **счетным** [24]. Согласно этому определению всякое бесконечное множество является счетным, если найдется способ показать, как нумеровать его элементы.

Мощность счетного множества обозначается символом $\aleph_0$, читается: алеф нуль (ударение на букву *а* [42, с. 422]). Алеф — первая буква финикийского (древнесемитского) алфавита.

В подразделе 1.1 сказано, что кардинальное число конечного множества A обозначается $|A|$. Это обозначение будем использовать и в случае бесконечных множеств. Например, если E — счетное множество, то $|E| = \aleph_0$.

Приведем некоторые теоремы о счетных множествах.

Теорема 1. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Докажем это утверждение. Пусть задано некоторое бесконечное множество E. Выберем среди его элементов, например, элемент e_1. В множестве E останется бесконечно много элементов. Выберем из них элемент e_2. Останется по-прежнему бесконечно много элементов. Выберем элемент e_3 и т. д. до бесконечности. Выбранные элементы образуют подмножество B, причем оно счетно, поскольку его элементы можно пронумеровать. От того, что мы из множества E удалили множество B, мощность множества E не изменилась, так как после удаления элементов e_1, e_2, e_3, … всякий раз в множестве E оставалось бесконечно много элементов. Таким образом, для всякого бесконечного множества E справедливо: $B \subset E$, где B — счетное множество, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно. Для доказательства этой теоремы запишем натуральный ряд и каждому натуральному числу поставим во взаимно однозначное соответствие элементы заданного счетного множества K. Отметим каким-либо способом элементы бесконечного множества $T \subset K$. Очевидно, что отмеченные элементы можно пронумеровать, следовательно, множество $T \subset K$ является счетным, что и доказывает теорему.

Теорема 3. Множество всех целых чисел счетно. Чтобы доказать это утверждение, целые числа расположим в два ряда следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \dots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, \dots \end{array}$$

Получилась матрица из двух строк с бесконечным числом колонок. Нумеруя элементы матрицы по колонкам сверху вниз и слева направо, мы каждому целому числу поставим во взаимно однозначное соответствие натуральное число, что и доказывает теорему.

Теорема 4. Объединение счетного множества A и конечного множества B счетно. Чтобы доказать это утверждение, достаточно пронумеровать элементы конечного множества B, а остальные натуральные числа поставить во взаимно однозначное соответствие элементам счетного множества.

Теорема 5. Объединение конечного множества счетных множеств счетно. Пусть дано конечное множество $\{A, B, \dots, L\}$, где $A, B, \dots, L$ — счетные множества. Найдем их объединение: $Q = A \bigcup B \bigcup \dots \bigcup L$.

Чтобы доказать счетность множества Q, запишем элементы множеств $A, B, \dots, L$ одно под другим:

$$\begin{aligned} A &= \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots\}; \\ B &= \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \dots\}; \\ &\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ L &= \{l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4,\ \dots\}. \end{aligned}$$

Получилась матрица с конечным числом строк и бесконечным числом колонок. Пронумеруем сверху вниз элементы первой колонки, затем также сверху вниз продолжим нумерацию элементов второй колонки, третьей и т. д. до бесконечности. При таком варианте нумерации каждый элемент множества Q получит порядковый номер, следовательно, множество Q счетно, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Декартово произведение двух счетных множеств A и B счетно. Представим элементы множества $A \times B$ в виде матрицы. Колонкам матрицы поставим во взаимно однозначное соответствие элементы множества A, строкам — элементы множества B. Тогда на пересечении колонок и строк разместятся элементы множеств $A \times B$ (рис. 28). Нумерацию этих элементов выполним методом треугольника. Первым элементом является пара (a_1, b_1), вторым — (a_2, b_1), третьим — (a_1, b_2); затем — (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3) и т. д.

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots \\ \hline
b_1 & a_1 b_1 & \rightarrow & a_2 b_1 & & a_3 b_1 & & a_4 b_1 & & \dots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
b_2 & a_1 b_2 & & a_2 b_2 & & a_3 b_2 & & a_4 b_2 & & \dots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
b_3 & a_1 b_3 & & a_2 b_3 & & a_3 b_3 & & a_4 b_3 & & \dots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\
b_4 & a_1 b_4 & & a_2 b_4 & & a_3 b_4 & & a_4 b_4 & & \dots \\
 & & \swarrow & & & & & & & \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Рис. 28

Согласно рис. 28 в нумерации участвуют элементы, расположенные на гипотенузах равнобедренных треугольников, общей вершине которых соответствует пара (a_1, b_1). Счет всегда начинается с верхней точки гипотенуз. Ведя счет таким путем, мы будем проходить по все удлиняющимся гипотенузам, не пропуская ни одной пары и не встречая ни одной пары дважды. В результате каждый элемент множества $A \times B$ получит свой порядковый номер, а это значит, что множество $A \times B$ счетно, что и требовалось доказать.

Теорема 7. Объединение счетного множества счетных множеств A, B, C, … счетно.

Докажем эту теорему. Запишем элементы множеств A, B, C, … в виде матрицы (рис. 29), после чего элементы множества

$$Z = A \cup B \cup C \cup \dots$$

пронумеруем методом треугольника точно так же, как и в случае теоремы 6. При таком обходе элементов матрицы в нумерацию будут вовлекаться элементы все новых и новых множеств, и рано или поздно каждый элемент множества Z получит свой порядковый номер, что и доказывает теорему.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
A=\{ & a_1 & \to & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots\} \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
B=\{ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & \dots\} \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
C=\{ & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & \dots\} \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\
D=\{ & d_1 & & d_2 & & d_3 & & d_4 & & \dots\} \\
 & & \swarrow & & & & & & & \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Рис. 29

Последняя теорема (теорема 7) является, вероятно, самой впечатляющей из всех рассмотренных. Трудно согласиться с тем, что если взять бесконечно много элементов множества A, добавить к ним бесконечно много элементов множества B, затем туда же включить бесконечно много элементов множества C и так бесконечно много раз, то в результате получится всего лишь счетное множество. Получается, что мощность счетного множества нисколько не изменится, если количество его элементов увеличить в бесконечное число раз.

Сформулируем еще две теоремы о счетных множествах, не приводя их доказательства.

Теорема 8. Множество всех рациональных чисел счетно. Рациональными называют все положительные и отрицательные дроби вида P/q, где P и q — натуральные числа. К рациональным относятся все целые положительные и отрицательные числа, а также нуль.

Теорема 9. Множество всех алгебраических чисел счетно. Алгебраическими называются числа, являющиеся корнями уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые числа (т. е. они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю). Числа, которые не являются алгебраическими, называются **трансцендентными** [18, с. 8].

Упражнения

1. (МЮР). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) является ли счетным множество $\{15, 16, 17, \ldots, 100\}$?

2) верно ли, что если множество счетно, то все его элементы можно сосчитать?

3) известно, что декартово произведение двух счетных множеств A и B счетно. Является ли счетным множество $A \times B \times C$, если C — счетное множество?

4) мощность некоторого множества A равна $\aleph_0$. Мощность другого множества B также равна $\aleph_0$. Верно ли, что мощность множества $A \cup B$ равна $2\aleph_0$?

5) дано конечное множество A_1. К его элементам добавили все элементы конечного множества A_2. К получившемуся конечному множеству добавили все элементы конечного множества A_3 и так далее до бесконечности. Получили множество Q в виде объединения бесконечного числа конечных множеств: $Q = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ Является ли счетным множество Q?

6) является ли конечным множество Q предыдущего вопроса?

7) из множества натуральных чисел удалили все числа, которые делятся без остатка на какое-нибудь целое число. Является ли конечным множество, состоящее из оставшихся элементов?

8) является ли конечным множество атомов Солнца?

2. (ЛКС). Укажите номера множеств, мощность которых равна $\aleph_0$:

1) множество всех простых чисел;

2) $\{x / x < 1000$, x — целое число$\}$;

3) множество атомов земного шара;

4) множество натуральных чисел, без остатка делящихся на $\sqrt[3]{1331}$;

5) $\{x / x < 10^{1000}$, x — натуральное число$\}$;

6) множество натуральных чисел, без остатка делящихся на $\sqrt[4]{1441}$;

7) $\{x / x > 1000^{1000}$, x — натуральное число$\}$;

3. (ЖАО). Укажите номера конечных множеств в предыдущем упражнении.

4. (УШС). Укажите элементы множества $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, если множества A, B, C являются счетными и имеют вид $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $B = \{6, 7, 8, \ldots\}$; $C = \{11, 12, 13, \ldots\}$.

5. (96). Укажите элементы множества $A \cap B \cap \overline{C}$, где A, B, C — множества, указанные в предыдущем упражнении.

6. (Е46). Найдите элементы множества $\{x / x$ — число, без остатка делящееся на 23, x — простое число$\}$.

7. (336). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) дано счетное множество A. Среди его элементов выбрали конечное множество элементов, и все эти элементы удалили из множества A. В оставшемся множестве снова выбрали некоторым образом конечное множество и все его элементы удалили из множества A. Такую операцию удаления конечных множеств повторили бесконечно много раз. Останутся ли в множестве A какие-нибудь элементы?

2) тот же вопрос, что и предыдущем случае, но с условием, что всякий раз удаляли счетное множество элементов;

3) дано n множеств, где n — натуральное число. Объединение этих множеств есть счетное множество. Возможно ли, что все n заданных множеств конечны?

4) в множество $\{1, 2, \ldots, 20\}$ между элементами 6 и 7 вставили все дробные числа $6/n$, где n — натуральное число, превосходящее 6. Будет ли счетным получившееся множество?

5) является ли пустым множество $A \cap B$, где A — множество четных чисел; B — множество простых чисел?

6) является ли счетным множество квадратных уравнений?

7) является ли число $\sqrt{17}$ элементом множества алгебраических чисел?

8) даны множества:

$A = \{x/x$ — натуральное число, делящееся без остатка на 17$\}$;

$B = \{x / x$ — натуральное число, делящееся без остатка на 23$\}$.

Является ли бесконечным множество $A \cap B$?

3.4. Несчетные множества

Если A — конечное множество, то $|A| < |B(A)|$, т. е. булеан всякого конечного множества A содержит больше элементов, чем множество A, так как

$$|B(A)| = 2^{|A|}.$$

Всякое бесконечное множество также имеет подмножества, и можно говорить о мощности его булеана. Пусть дано счетное множество E. Чтобы найти все его подмножества, поступим так же, как и в случае конечных множеств (см. подраздел 1.2), т. е. поставим в соответствие каждому элементу множества E двоичный разряд. Тогда всякому подмножеству множества E будет соответствовать двоичное число бесконечной длины. Пусть единица в записи двоичного числа обозначает вхождение в подмножество соответствующего элемента $e \in E$, а нуль — что соответствующий элемент в подмножество не входит. Тогда по аналогии с конечными множествами можно утверждать, что мощность булеана $B(E)$, т. е. множество всех двоичных чисел бесконечной длины, представится кардинальным числом вида

$$|B(E)| = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Теорема 1. Мощность булеана бесконечного множества E превышает мощность множества E.

Это очень важная теорема. Одно из наиболее простых ее доказательств приведено в [6, с. 66].

Если E — счетное множество, то согласно приведенной теореме

$$|B(E)| > |E|, \text{ т. е. } \aleph_1 > \aleph_0.$$

Множество $B(E)$ **несчетно** и его мощность равна мощности **континуума** (*continuum* — в переводе с латинского — непрерывное; примером континуума может служить множество точек отрезка) [46, с. 46].

Теорема 2. Множество всех действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$ несчетно.

Для доказательства этого сначала предположим, что все действительные числа можно пронумеровать. Запишем одна под другой бесконечные десятичные дроби:

$$\begin{array}{c} 0,a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots \\ 0,b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots \\ 0,c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots \\ 0,d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \\ \ldots \end{array}$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, \ldots$ — десятичные цифры ($i = 1, 2, 3, 4, \ldots$).

Получили матрицу, содержащую счетное множество строк, в каждой из которых бесконечное число десятичных цифр. (Для строгости изложения десятичные цифры следовало бы заменить символами Кенига [46, с. 48], однако для простоты мы пожертвуем этой строгостью, в связи с чем все приведенные здесь рассуждения надо считать не доказательством, а лишь его эскизным наброском.) Допустим, что в матрице нет ни одной пары равных между собой чисел. Все ли действительные числа окажутся в матрице? Нет, не все. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся диагональным методом, разработанным Г. Кантором, и найдем число, которое отсутствует в матрице, т. е. не получит номера. Суть метода Г. Кантора применительно к данному случаю состоит в следующем. Если в первом числе первая после запятой цифра (цифра a_1) не равна, например, 3, то в искомое число после запятой записываем цифру 3. Если же $a_1 = 3$, то записываем, допустим, 2. Переходим ко второму числу матрицы. Если $b_2 \ne 3$, то записываем на втором месте искомого числа цифру 3. Если $b_2 = 3$, то записываем 2. Перейдя к третьему числу, записываем в искомое число 3, если $c_2 \ne 3$, и т. д. до бесконечности. Очевидно, что получившееся число отсутствует в списке, так как оно отличается от первого числа первой после запятой цифрой, от второго числа отличается второй цифрой, от третьего — третьей и т. д. Таким образом, полученное число отсутствует в списке, но принадлежит множеству действительных чисел интервала $0 \le x < 1$.

Полученное число не является единственным, отсутствующим в списке. Достаточно вместо цифр 3 и 2 взять какие-либо другие, и мы получим еще одно число. Даже если найденные числа включить в общий их список, то и в расширенном списке будут находиться числа, которые не получат номера.

Так как мощность булеана $B(E)$ равна мощности множества всех действительных чисел интервала $0 \le x < 1$, то эти множества эквивалентны. Они являются несчетными и оба характеризуются кардинальным числом $\aleph_1$. Такие множества условимся называть $\aleph_1$-множествами.

Мощность континуума — не самая большая мощность среди бесконечных множеств. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся двоичными числами так же, как и в случае счетных множеств. Поставим в соответствие каждому элементу $\aleph_1$-множества двоичный разряд. Если единица в числе обозначает вхождение элемента в подмножество, а нуль — отсутствие в подмножестве данного элемента, то каждому двоичному числу будет соответствовать некоторое подмножество $\aleph_1$-множества. Мощность множества таких подмножеств обозначим буквой $\aleph_2$. Очевидно, что

$$\aleph_2 = 2^{\aleph_1},$$

откуда следует, что мощность булеана $\aleph_1$-множества (т. е. мощность множества всех подмножеств $\aleph_1$-множества) превышает мощность $\aleph_1$-множества: $\aleph_2 > \aleph_1$.

Точно так же можно утверждать, что

$$\aleph_3 = 2^{\aleph_2},$$

т. е. мощность $\aleph_3$-множества превышает мощность булеана $\aleph_2$-множества.

Далее по аналогии получаем:

$$\aleph_4 = 2^{\aleph_3},\ \aleph_5 = 2^{\aleph_4}, \ldots, \aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}, \ldots,$$

откуда следует, что множества с наибольшей мощностью не существует.

В завершение подраздела приведем одну теорему о множествах мощности континуума: объединение множества мощности континуума и счетного множества имеет мощность континуума [46, с. 49].

Упражнения

1. (ВУК). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Является ли несчетным множество, если его кардинальное число имеет вид:

1) $2^{\aleph_0}$;
2) $\aleph_1^2$;
3) $680^{\aleph_0}$;
4) $\aleph_0^{200}$;
5) $\aleph_1^{200}$;
6) ${\aleph_0}^{\aleph_0}$;
7) $\left(2^{200}\right)^{\aleph_0}$;
8) $\aleph_0^3$?

2. (178). Укажите множество мощности континуума:

1) объединение счетного и несчетного множеств;

2) объединение счетных множеств, множество которых счетно;

3) разность несчетного и счетного множеств;

4) разность $A - B$, где A и B — несчетные множества;

5) $A \bigcup B$, где A — счетное множество, B — множество мощности континуума;

6) разность $A - B$, где A — несчетное множество, B — счетное множество;

7) разность $A - B$, где $|A| = \aleph_1$, $|B| = \aleph_0$.

3. (279). Укажите номера множеств, мощность которых превышает $\aleph_3$:

1) $A \bigcup B$, где $|A| = \aleph_3$; $|B| = \aleph_0$;

2) $A \bigcup B$, где $|A| = \aleph_5$; $|B| = \aleph_8$;

3) $A - B$, где $|A| = \aleph_6$; $|B| = \aleph_4$;

4) $A \bigcup B \bigcup C$, где $|A| = \aleph_0$; $|B| = 2^{|A|}$; $|C| = 2^{|B|}$;

5) $A \bigcup B \bigcup C$, где $|A| = \aleph_1$; $|B| = 2^{|A|}$; $|C| = 2^{|B|}$;

6) $(A - B) \bigcup C$, где $|A| = |B| = \aleph_2$; $|C| = 2^{|A|}$;

7) $A \bigcup B \bigcup C$, где $|A| = |B| = \aleph_2$; $|C| = 2^{2^{|B|}}$.

3.5. Гипотеза континуума

В 1878 г. Г. Кантор высказал предположение, что всякое множество действительных чисел либо конечно, либо счетно, либо несчетно (т. е. эквивалентно множеству всех действительных чисел) [24, с. 261]. Оставим в стороне конечные множества, тогда по Г. Кантору всякое бесконечное десятичное число принадлежит либо счетному множеству N, либо несчетному множеству M с кардинальным числом $|M| = \aleph_1 = 2^{|N|} = 2^{\aleph_0}$.

В предыдущем подразделе было показано, что

$$\aleph_1 > \aleph_0, \text{ т. е. } |M| > |N|,$$

где M — первое после счетного множество, мощность которого превышает мощность счетного множества. Первое ли? Кто это доказал? А вдруг между ними существует множество E с промежуточной мощностью:

$$|N| \le |E| \le |M|?$$

Несчетное множество M с большей мощностью получено по аналогии с конечными множествами путем нахождения булеана счетного множества N. Очень уж непохожи свойства конечных и бесконечных множеств, поэтому вполне естественно задать вопрос: верно ли, что мощность множества всех подмножеств счетного множества есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел? Это и есть знаменитая **гипотеза континуума**. Несмотря на простоту формулировки, эта гипотеза десятки лет оставалась удивительно неподатливой, хотя над ней работали лучшие математики мира. В 1900 г. на втором Международном конгрессе в Париже немецкий математик, профессор Геттингенского университета Давид Гильберт (1862—1943) опубликовал обращение к математикам мира, в котором сформулировал более двух десятков наиболее важных и не решенных в то время проблем. В этом списке проблему (гипотезу) континуума Д. Гильберт поставил на первое место. До 30-х годов прошлого столетия все попытки решить первую проблему Гильберта оканчивались нулевым результатом. Лишь в 1938 г. Курт Гедель (1906—1978) — австрийский математик — показал, что континуум-гипотеза не может быть опровергнута традиционными средствами теории множеств.

Более существенный результат получил в 1966 г. профессор Станфордского университета (США, штат Иллинойс) П. Коэн. Он доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств. Согласно его выводам можно считать, что между счетным множеством и множеством всех его подмножеств существует промежуточное множество, но можно считать, что его не существует. В любом случае это не противоречит всем остальным аксиомам теории множеств [39]. Здесь можно провести аналогию с пятым постулатом о параллельных прямых. Его можно принять, можно и отвергнуть. В любом случае он не противоречит всем остальным аксиомам геометрии.

В заключение подраздела отметим, что не все математики одинаково формулируют гипотезу континуума. Например, в [46, с. 52] говорится: «Гипотезой континуума называют утверждение $\aleph_1 = 2^{(\aleph_0)} = C$» (здесь C — мощность континуума). Если Вы обратитесь к упр. 3 подраздела 3.10, то вполне возможно, что эта формулировка гипотезы континуума Вам покажется более загадочной, чем ее первый вариант о множестве промежуточной мощности.

3.6. Трансцендентные числа

Множество действительных чисел делится на два класса. Первый класс образуют алгебраические числа, второй — трансцендентные. Алгебраические числа, как сказано в подразделе 3.3, — это числа, которые являются корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. А что такое трансцендентные числа? В [24, с. 616] дается такое определение: «Трансцендентные числа (лат. *transcendens* — выходящий за пределы) — числа, которые не могут быть корнями никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами; например, число $\pi = 3{,}14159\ldots$». Понятие трансцендентного числа в этой цитате поясняется единственным примером — числом π. В [42, с. 1342] приводится число π и еще два примера: «Трансцендентными числами являются: число $\pi = 3{,}14159\ldots$; десятичный логарифм любого целого числа, не изображаемого единицей с нулями, число $e = 2{,}71828$ и др.» Складывается впечатление, что трансцендентные числа представляют собой величайшую редкость в множестве действительных чисел по отношению к алгебраическим (им даже имена дают!). На самом деле все наоборот. Если E — множество действительных чисел, R — множество алгебраических чисел, то $E \bigcap \overline{R}$ — множество трансцендентных чисел. Но множество R счетно, следовательно, множество $E \bigcap \overline{R}$, т. е. множество всех трансцендентных чисел, несчетно. Это рассуждения Г. Кантора. Ими он доказал существование трансцендентных чисел, не приводя ни одного их примера, что в свое время (1873 г.) произвело на математиков мира большое впечатление.

Очень интересная ситуация: мощность множества трансцендентных чисел превышает мощность множества алгебраических чисел, а математики имеют дело в основном с алгебраическими числами, в то время как трансцендентные числа почти полностью находятся в тени и приходится затрачивать значительные усилия, чтобы «высветить» хотя бы несколько из них. В этом состоит своеобразный парадокс трансцендентных чисел. Впрочем, его нетрудно объяснить. Дело в том, что понятие трансцендентного числа сформулировано так, что его совершенно невозможно использовать в качестве критерия, позволяющего по виду произвольно заданного числа однозначно признать его алгебраическим или трансцендентным. Если бы множество всех алгебраических уравнений было конечным, то, по крайней мере теоретически, можно было бы перебрать все уравнения, в каждое из них подставить заданное число и выяснить, является ли оно его корнем. Но множество алгебраических чисел бесконечно, следовательно, метод прямого перебора неприменим даже теоретически. Поэтому решать вопрос о трансцендентности того или иного числа приходится другими и довольно трудными путями. Например, когда была доказана трансцендентность числа π (в 1882 г.), то это явилось заметным событием в науке.

3.7. Об эквивалентности множеств точек геометрических объектов

В подразделе 3.4 показано, что множество действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$ несчетно. Так как любому числу из этого интервала соответствует точка на отрезке [0; 1) числовой оси, то множество точек отрезка [0; 1) эквивалентно множеству всех действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$.

Пусть даны два отрезка *AB* и *CD* различной длины. Эквивалентны ли множества их точек? Интуиция нам подсказывает, что отрезок, равный радиусу атомного ядра, содержит гораздо меньше точек по сравнению с отрезком, длина которого равна расстоянию от Земли до Солнца. Г. Кантор предложил очень остроумный способ, при помощи которого легко доказать, что между элементами множеств *P* и *Q* существует взаимно однозначное соответствие, если *P* — множество точек отрезка длины *p*, *Q* — множество точек отрезка длины *q*; при этом возможно, что $p \ne q$.

Расположим отрезки *AB* и *CD* так, как показано на рис. 30 (параллельность отрезков — требование необязательное). Проведем из точки *O* прямую, пересекающую оба отрезка. Получим точки *a* и *a′*. Если сместить прямую, выходящую из точки *O*, то получим новую пару точек пересечения *b* и *b′* (на рис. 30 они не показаны). При этом если точка *b* не совпадает с точкой *a*, то не совпадает и точка *b′* с *a′*. Таким способом любой точке отрезка *AB* можно однозначно поставить в соответствие точку отрезка *CD* и наоборот: всякой точке отрезка *CD* однозначно соответствует точка отрезка *AB*. Следовательно, множества точек отрезков *AB* и *CD* эквивалентны, а это значит, что (говоря языком конечных множеств) число точек на отрезке, равном расстоянию от Земли до Солнца, точно такое же, что и на отрезке, равном радиусу атомного ядра.

Оставим отрезок *AB* неизменным, а отрезок *CD* удлиним в обе стороны до бесконечности, т. е. превратим его в числовую ось. Г. Кантор доказал, что множество точек конечного отрезка *AB* и множество точек всей числовой оси эквивалентны. Но на этот раз он воспользовался другим графическим способом. Пусть дан открытый отрезок *AB*. Найдем его середину *O* и проведем полуокружность с центром в точке *O* и диаметром, равным отрезку *AB* (рис. 31). Параллельно отрезку *AB* расположим числовую ось. Выберем на отрезке *AB* какую-либо точку *a* и проведем из нее перпендикуляр до пересечения с окружностью. Получим точку *a′*. Через точки *O* и *a′* проведем прямую до пересечения с числовой осью. Получим точку *a″*. Эта точка однозначно соответствует точке *a* числового отрезка *AB*. Очевидно, что любой точке числовой оси также однозначно соответствует точка отрезка. Следовательно, множество точек отрезка *AB* эквивалентно множеству точек числовой оси.

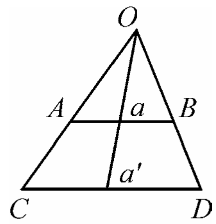


Рис. 30

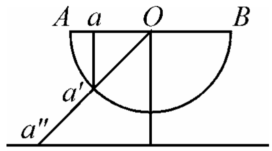


Рис. 31

Следующий результат Кантора является еще более удивительным. Он доказал, что множество точек отрезка эквивалентно множеству точек квадрата, сторона которого равна этому отрезку. Вот это утверждение совсем не укладывается в сознании! Вообще-то Г. Кантор искал доказательство того, что мощность множества точек квадрата не эквивалентна множеству точек отрезка и когда нашел доказательство прямо противоположного утверждения, то был настолько изумлен своим открытием, что в письме математику Р. Дедекинду писал: «Я вижу это, но не верю этому» [6, с. 62].

Принцип доказательства Г. Кантора состоит в следующем (заметим, что эти рассуждения являются не более чем иллюстрацией, эскизным наброском доказательства. При более строгих рассуждениях необходимо пользоваться символами Кенига [46]). Проведем оси декартовых координат *x* и *y*, отложим на каждой из них отрезок [0; 1) и построим квадрат (на рис. 32 он обозначен пунктирными линиями). Тогда некоторая точка *A* квадрата может быть представлена двумя бесконечными десятичными дробями:

$$x_a = 0,\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$$
$$y_a = 0,\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$$

Образуем из этих чисел новую дробь, расположив цифры числа y_a между цифрами числа x_a:

$$V_A = 0,\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3\, a_4\, b_4 \ldots$$

Очевидно, что число V_A принадлежит отрезку [0; 1).

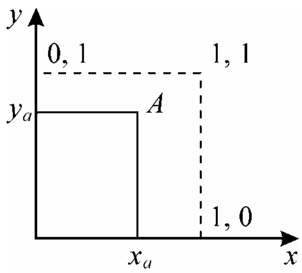


Рис. 32

Рассмотренным способом каждой точке квадрата можно поставить в однозначное соответствие определенную точку отрезка [0; 1). Если же взять какую-нибудь точку отрезка, то, представив соответствующую ей десятичную дробь в виде чисел x_A и y_A, мы найдем точку квадрата, находящуюся в однозначном соответствии с заданной точкой отрезка.

Таким образом, множество точек отрезка [0; 1) эквивалентно множеству точек квадрата, сторона которого совпадает с заданным отрезком.

Пользуясь приемом, разработанным Г. Кантором, нетрудно убедиться в следующем:

а) множество точек любого конечного отрезка эквивалентно множеству точек куба, ребро которого равно данному отрезку. Для доказательства этого достаточно к числам x_A и y_A (две координаты) добавить число z_A (третья координата) и тем же приемом, что и в случае квадрата, найти число V_A, принадлежащее отрезку [0; 1). Аналогичное утверждение справедливо и для четырехмерного пространства, а также пятимерного, шестимерного и вообще *n*-мерного;

б) множество точек отрезка длиной в 1 микрон эквивалентно множеству точек куба, длина ребра которого равна расстоянию от Земли до Полярной звезды (сначала множество точек микронного отрезка отобразим на ребро куба, а затем на весь куб);

в) и т. д., подобных утверждений можно сформулировать и доказать сколько угодно.

3.8. Трансфинитные числа

Согласно Г. Кантору всякое множество называется вполне упорядоченным, если любое его подмножество имеет первый элемент. Очевидно, что множество натуральных чисел является вполне упорядоченным, поскольку в любом множестве натуральных чисел можно найти наименьшее число, которое и будет первым.

Пусть на числовой полуоси x (рис. 33) отмечены точки a_1, a_2, a_3, …, соответствующие натуральным числам 1, 2, 3, … Отобразим их на отрезок AB единичной длины точно так же, как это сделано на рис. 31. Из рис. 33 видно, что точке a_1 числовой оси соответствует точка b_1 отрезка AB, точке a_2 — точка b_2 и т. д. По мере движения по числовой оси вправо точки на отрезке AB будут прибли-жаться к точке B. А что соответствует самой точке B? Ведь прямая, проходящая через точки A и B до пересе-чения с числовой полуосью, является параллельной этой оси и нигде ее не пересекает. Чтобы занумеровать и эту точку, необходимо ввести новое число. Так как оно не может быть конечным, то его назвали **трансфинитным** [6; 24; 46] (от лат. *trans* — за пределами, через; *finitus* — ограниченный, определенный, законченный). Для его обозначения используется знак ω [6; 46]. Таким образом, точка B отрезка AB получит порядковый номер ω — наи-меньшее трансфинитное число.

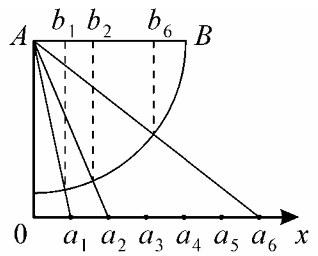


Рис. 33

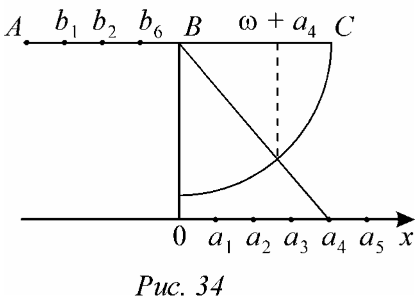


Рис. 34

Передвинем влево отрезок AB, а на его месте изобразим такой же отрезок BC единичной длины (рис. 34) и снова отобразим на него натуральные числа. Но теперь номера на отрезке BC будут иметь вид

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \omega + 3,\ \ldots,\ 2\omega,$$

где число 2ω соответствует точке C на отрезке BC.

Передвинем влево оба отрезка AB и BC, а на освободившемся месте расположим отрезок CD и отобразим на него натуральные числа и так далее до бесконечности. В результате получим новую числовую ось, составленную из отрезков AB, BC, CD, DE и так далее, на которой в строгом порядке расположены трансфинитные числа:

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \ldots,\ 3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2.$$

Обратимся к рис. 33 и 34. Заменим в них числовую ось новой осью с трансфинитными числами и выполним все те же процедуры. Тогда получится еще одна ось с трансфинитными числами:

$$\omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2,\ \omega^2 + 3,\ \ldots,\ \omega^2+\omega,\ \ldots,\ 3\omega^2,\ \ldots,\ \omega^3\ldots$$

Продолжая аналогичным образом заменять числовые оси, мы будем получать новые трансфинитные числа:

$$\omega^\omega,\ \omega^\omega+1,\ldots,2\omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega+1},\ldots,\omega^{\omega^2},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,$$

множество которых является упорядоченным.

3.9. Парадоксы теории множеств

Парадокс (на греческом языке: *para* — против, *doxa* — мнение) — это высказывание, утверждение, резко расходящееся с общепринятым мнением, не согласующееся со здравым смыслом. Парадокс — это рассуждение, приводящее к взаимоисключающим выводам, одинаково доказуемым. В логике парадоксы называют **антиномиями** [24, с. 43]. Термин «антиномия» впервые ввел в обиход немецкий философ Рудольф Гоклен (1547—1628). Используется также термин **«апория»** (на греческом языке *a* — отрицающая частица, *poros* — выход; *aporia* — безвыходность, безвыходное положение, затруднение, недоумение) [24, с. 47].

Всякий парадокс привлекает к себе внимание и вызывает стремление разобраться в причинах его возникновения. В этом состоит положительная роль парадоксов в науке.

Теория множеств, созданная Г. Кантором, давала основание считать, что наконец-то математика обрела надежный фундамент. Однако прошло некоторое время — и математику потрясли сообщения о том, что в теории множеств обнаружены парадоксы. Один их них, получивший название **«парадокс Кантора»**, был открыт самим Г. Кантором. Чтобы пояснить его суть, сначала рас-смотрим две теоремы.

Теорема 1. Для любого кардинального числа m справедливо неравенство вида $m < 2^m$ [26, с. 50].

Теорема 2. Мощность m' подмножества множества, имеющего мощность m, удовлетворяет неравенству: $m' \le m$. Для бесконечных множеств справедливость теоремы следует из теоремы 2 подраздела 3.3. В случае же конечных множеств справедливость теоремы очевидна, если считать, что само множество является своим подмножеством (см. подраздел 1.2), для которого $m' = m$.

Перейдем к парадоксу Кантора. Пусть M — множество всех множеств. Его кардинальное число — $|M|$. Согласно теореме 1 имеем:

$$|M| < 2^{|M|},$$

то есть мощность множества M меньше мощности его булеана.

А теперь внимательно рассмотрим множество M. Какие элементы в него входят? Все множества. Это значит, что в него входят и все подмножества, поскольку подмножество — это тоже множество. В множество M входят и такие подмножества, мощность которых равна $2^{|M|}$ (это множество всех подмножеств множества M). Согласно теореме 2 имеем:

$$2^{|M|} \le |M|.$$

Таким образом, с одной стороны, $|M| < 2^{|M|}$, а с другой — $|M| \geq 2^{|M|}$. В этом и состоит парадокс (антиномия) Кантора.

Парадокс Кантора обусловлен тем, что рассматриваемое множество является своим элементом. В 1902 г. Б. Рассел открыл парадокс, основанный на обратном явлении, т. е. когда рассматриваемое множество не является своим элементом. (Бертран Рассел (1872—1970) — английский философ, математик и логик, общественный деятель, лауреат Нобелевской премии 1950 г.)

Прежде чем рассматривать **парадокс Б. Рассела**, введем два теоретико-множественных понятия:

1) множество, не содержащее себя в качестве своего элемента, условимся называть обычным. Таких множеств большинство. Например, стадо коров — это не корова, следовательно, стадо коров не является элементом множества коров; множество домов — не дом; множество планет — не планета и т. д.;

2) множество, которое содержит себя в качестве своего элемента, будем называть необычным. Примеры необычных множеств: множество списков — это тоже список, множество групп — это группа и т. д.

А теперь рассмотрим множество S, в которое входят все обычные и только обычные множества. Каким является множество S — обычным или необычным? Допустим, что оно обычное. Если оно обычное, то должно быть своим элементом. Но тогда (по второму определению) оно станет необычным. Следовательно, множество S нельзя назвать обычным. Предположим, что оно необычное. Но в этом случае оно должно содержать себя в качестве элемента, что невозможно, так как в множество S входят только обычные множества.

Таким образом, множество S не является обычным и не является необычным. Каким же оно является, если согласно вышеприведенным определениям любое множество может быть либо обычным, либо необычным и третьего не дано? В этом и заключается парадокс Б. Рассела.

В литературе широко известен **парадокс брадобрея**, суть которого в следующем. Одному солдату, оказавшемуся по профессии парикмахером, командир приказал брить тех и только тех солдат, которые сами не бреются. Солдат-брадобрей побрил всех, кто сам не брился, и остановился перед вопросом: должен ли он брить самого себя? Если он будет брить себя, то окажется среди тех, кто сам бреется. Согласно приказу таких брить ему нельзя. Если не брить, то будет считаться, что он сам не бреется, а таких надо брить. Этот парадокс является своеобразным вариантом парадокса Б. Рассела, только без привлечения понятия множества [6; 24; 26; 36].

Рассмотренных примеров вполне достаточно для первого знакомства с теоретико-множественными парадоксами, потрясшими казавшийся таким прочным фундамент математики. Вообще же, кроме вышеприведенных, существуют и другие парадоксы, например: «парадокс оценки каталогов» [26], «крокодиловский софизм», «парадокс лжеца» [24], парадокс кучи и др.

В чем же кроется опасность парадоксов? Почему математиков так неприятно поразило их открытие? Понять это нетрудно. Если сами основы математики противоречивы, то где гарантии, что в результатах логических рассуждений нет противоречий? Грубо говоря, в самом ли деле истинными являются доказанные теоремы, нет ли среди них утверждений, которые можно доказать и столь же убедительно опровергнуть?

Математики-профессионалы отнеслись к парадоксам по-разному. Одни вообще не обратили на них внимания, другие стали искать дефекты в самой логике, третьи пытались уточнить понятие множества, четвертые (их называют формалистами) решили, что теорию множеств надо аксиоматизировать [32], пятые отвергали понятие актуальной бесконечности и призывали заменить его понятием потенциальной бесконечности и т. д. [26].

В каждом из сформировавшихся направлений получены серьезные результаты, однако в целом до завершения работ еще далеко, поэтому исследования в области оснований математики и других вопросов теории множеств продолжаются.

3.10. Упражнения на тему «Парадоксы теории множеств»

Вся теория бесконечных множеств является полностью умозрительной наукой, поэтому истину мы можем получить только на основе логики. Но логика — это тонкий инструмент, и пользоваться им надо крайне осторожно, иначе очень легко допустить ошибку и получить более чем странный вывод. Для иллюстрации этого рассмотрим пример, который вполне можно назвать логическим анекдотом.

Некто пришел в магазин «Одежда» и попросил продавца показать свитер. Осмотрев полученный свитер, Некто сказал:

— Нет, свитер возьмите, а взамен покажите куртку.

Куртка ему понравилась, он надел ее и пошел к выходу.

— А кто платить будет? — закричал ему вслед продавец.

— За что? — обернулся Некто.

— Как это за что? За куртку, разумеется! — сказал продавец.

— Но я же Вам за нее отдал свитер, — возразил Некто.

— Да ведь Вы и за свитер не платили! — возмутился продавец.

— А почему я должен платить за свитер, если я его не взял и он находится у Вас? — спросил Некто и поставил этим продавца в тупик.

Подобные ситуации возможны и в умозрительных построениях теории бесконечных множеств. В данном подразделе приведен ряд упражнений, которые автор сформулировал для того, чтобы дать учащемуся (студенту) тренировочный материал, способствующий развитию его способностей к логическим умозаключениям. Упражнения представлены в виде рассуждений, которые завершаются выводами, противоречащими либо здравому смыслу, либо теоремам, доказанным в предыдущих разделах. Ответы к упражнениям не даны. Их необходимо найти самостоятельно. Если Вы владеете логикой хотя бы на уровне повседневных рассуждений и хорошо усвоили идеи Г. Кантора о бесконечных множествах, упражнения окажутся Вам по силам.

1. Счетно ли множество натуральных чисел?

Известно, что множество натуральных чисел счетно (см. подраздел 3.3). Посмотрим, так ли это.

Запишем одно под другим в некоторой последовательности все возможные положительные целые числа (не обязательно в порядке возрастания). Получим матрицу с бесконечно большим числом строк и, следовательно, с бесконечно большим числом колонок (рис. 35). Очевидно, что множество строк в списке счетно, поскольку в каждой строке записано некоторое натуральное число.

5	6	9	4	3	7	7 …
0	0	7	2	6	5	4 …
3	6	9	9	7	1	1 …
5	0	0	0	0	6	0 …
1	1	1	1	1	9	1 …
0	0	0	0	0	0	2 …
1	0	9	9	3	3	1 …
	…			…		

Рис. 35

Воспользуемся диагональным методом, разработанным Г. Кантором для доказательства несчетности множества всех действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$, и рассмотрим число, отмеченное на рис. 35 стрелками. В соответствии с идеей диагонального метода найдем не одно, а все числа, которые будут отсутствовать в списке. Поскольку первая цифра в диагонали — это 5, то все отсутствующие в списке числа будут начинаться с любых цифр, кроме пяти. Аналогично все отсутствующие числа будут отличаться от второго числа матрицы (рис. 35) второй цифрой, если в них вторая цифра — не нуль, и т. д. Сколько же существует чисел, которые будут отсутствовать в списке? Первую цифру в диагонали можно заменить любой из девяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, вторую — также из девяти: 1, 2, …, 9, третью — по-прежнему из девяти: 0, 1, …, 8 и т. д. Тогда общее число N искомых чисел равно:

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots = 9^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Каждое из этих чисел отличается от первого числа матрицы первой цифрой, от второго — второй, от третьего — третьей и т. д. Таким образом, существует несчетное множество (см. подраздел 3.4) натуральных чисел, которые отсутствуют в списке всех натуральных чисел и которые невозможно занумеровать. Следовательно, множество натуральных чисел несчетно. Такой вывод справедлив независимо от того, в каком порядке расположены числа на рис. 35. Что Вы думаете обо всем этом?

2. Верно ли, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно?

Обратимся к рис. 35. Удалим из таблицы все числа, в записи которых встречается хотя бы один раз четная цифра: 0, 2, 4, 6, 8. Очевидно, что будут удалены и такие числа, которые содержат конечное число значащих цифр, поскольку при их записи использовались нули для превращения конечной последовательности цифр в бесконечную. Оставшиеся числа образуют бесконечное множество натуральных чисел. Удастся ли их пронумеровать?

Рассмотрим диагональное число (рис. 36). Так как теперь можно использовать лишь пять нечетных цифр, то все непронумерованные числа будут начинаться с одной из четырех цифр 1, 5, 7, 9. На втором месте в непронумерованных числах могут располагаться цифры 3, 5, 7, 9 и т. д. Всего получится M непронумерованных чисел:

$$M = 4^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Отсюда по сравнению с первым упражнением еще более странный вывод: бесконечное подмножество счетного множества несчетно! А между тем теорема 2 (подраздел 3.3) утверждает, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно. Как же быть? Где истина? Нельзя же считать, что оба взаимоисключающих вывода являются истинными.

3	5	9	9	7	1	1 …
1	1	1	1	1	9	1 …
3	1	7	7	3	3	3 …
7	3	3	3	5	5	1 …
7	3	1	3	7	5	3 …
7	1	1	7	7	3	5 …
5	5	3	5	7	1	1 …
	…			…		

Рис. 36

3. Верно ли, что существуют несчетные множества?

Известно, что множество всех подмножеств счетного множества несчетно (см. подраздел 3.4), то есть мощность булеана счетного множества E превышает мощность множества E. Это утверждение основано на том, что подмножества счетного множества не поддаются нумерации. Посмотрим, в самом ли деле подмножества счетного множества невозможно пронумеровать.

Запишем в ряд элементы счетного множества E:

$$E = \{\ldots\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\}.$$

Каждому элементу этого множества поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица обозначает, что соответствующий элемент множества E входит в подмножество, а нуль — что не входит (этим приемом мы уже пользовались в подразделе 1.2, когда рассматривали подмножества конечных множеств). Тогда каждому двоичному числу будет соответствовать вполне определенное подмножество (рис. 37).

…	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	
…	0	0	0	0	0	— пустое множество
…	0	0	0	0	1	— подмножество $\{a_1\}$
…	0	0	0	1	0	— подмножество $\{a_2\}$
…	0	0	0	1	1	— подмножество $\{a_1, a_2\}$
…	0	0	1	0	0	— подмножество $\{a_3\}$
…	0	0	1	0	1	— подмножество $\{a_1, a_3\}$
		…				…

Рис. 37

Двоичные числа образуют натуральный ряд. Следовательно, каждое подмножество рано или поздно получит свой порядковый номер, представленный в двоичном коде. Мало того, по двоичному коду мы всегда можем однозначно найти все элементы, из которых состоит подмножество, соответствующее этому номеру, и по любому набору элементов множества E найдем соответствующее ему двоичное число, т. е. порядковый номер подмножества.

Таким образом, подмножества счетного множества имеют строгую нумерацию. Отсюда вывод: множество всех подмножеств счетного множества счетно, т. е. мощность счетного множества E равна мощности его булеана!

А как же диагональный метод Г. Кантора? Диагональный метод здесь не поможет. Начиная с первой цифры (рис. 37), диагональ уходит влево, где никогда не встретится ни одной единицы, и чем больше номер строки, тем дальше диагональ уходит от единиц. Поэтому диагональное число, отсутствующее в списке, известно заранее. Это последовательность единиц, множество которых счетно (так как счетно множество E). Но об этом числе нельзя сказать, что оно отсутствует в списке, поскольку в нем будут все двоичные числа вида:

$$0\ldots01;\quad 0\ldots011;\quad \ldots\quad 0\ldots01\ldots1;\quad \ldots,$$

среди которых будет и число, состоящее из бесконечного числа единиц.

Если Вы согласитесь с этими выводами, то Вам придется признать, что в мире бесконечных множеств существуют только счетные множества, что исчезнет вся арифметика бесконечного, потеряет смысл гипотеза континуума и вообще от теории бесконечных множеств мало что останется.

4. Верно ли, что множество действительных чисел несчетно?

В подразделе 3.4 приведена теорема: «Множество всех действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$ несчетно». Что представляет собой число из интервала $0 \le x < 1$? Это десятичная дробь. Согласно приведенной теореме (и доказанной в подразделе 3.4 диагональным методом Г. Кантора) невозможно указать способ, позволяющий пронумеровать все десятичные дроби из интервала $0 \le x < 1$, поэтому их множество является несчетным. Верно ли, что все дроби действительно нельзя пронумеровать? Давайте рассуждать.

Известно, что множество натуральных чисел счетно. Если взять любое натуральное число и приписать к нему слева нуль с запятой, то получим дробь x из диапазона $0 \le x < 1$. А теперь поступим так: возьмем некоторое натуральное число a и запишем входящие в него цифры в обратном порядке. К полученному зеркальному числу припишем слева нуль с запятой. Получится дробь x также из диапазона $0 \le x < 1$. Например, если $a = 275$, то $x = 0{,}572$; если $a = 1000$, то $x = 0,\ 0001$; если $a = 300700$, то $x = 0{,}007003$, и т. д. Очевидно, что всякому натуральному числу однозначно соответствует его зеркальное число и, следовательно, всякому натуральному числу соответ-ствует дробь из диапазона $0 \le x < 1$ вида $0,\ a'$, где a' — зеркальное число. Эту дробь образуют только зеркаль-ные числа, и других чисел нет, т. е. во всякой дроби $0, a'$ из диапазона $0 \le x < 1$ число a' — это зеркальное число некоторого натурального числа a. Но множество зерка-льных чисел счетно и их легко пронумеровать. При этом всякая дробь получит вполне определенный порядковый номер. Процесс формирования списка зеркальных чисел не ограничен, следовательно, потенциально в списке окажутся дроби, соответствующие и таким трансцен-дентным числам, как π, e и др. Диагональный метод здесь, как и в предыдущем случае, не поможет. Запишем подряд все дроби (на основе чисел натурального ряда) и рассмотрим диагональное число. Очевидно, что оно будет состоять из одних нулей. Чтобы найти числа, которые будут отсутствовать в списке, достаточно все нули заменить какими-либо другими цифрами. Согласно диагональному методу любое число, не содержащее нулей, является непронумерованным. Например, дробь 0,777… отличается от первого числа в первом разряде (после запятой), от второго — во втором разряде и т. д. Но число 777… входит в множество натуральных чисел. Оно совпадает со своим зеркальным представлением, и, следовательно, дробь 0,777… не является непронумерованной. Таким образом, множество всех действительных чисел из диапазона $0 \le x < 1$ счетно! Такой вывод — это еще один «подкоп» под фундамент теории бесконечных множеств, и если Вы не разберетесь, в чем тут дело, то Вам придется признать, что вся теория бесконечных множеств — псевдонаука, не стоящая внимания.

5. Является ли синглетон счетным множеством?

Очень странный вопрос. Синглетон — это конечное множество, содержащее только один элемент. А счетное множество является бесконечным. Имеет ли смысл говорить об их эквивалентности? Докажем, что имеет.

Возьмем множество A натуральных чисел. Удалим из него множество A_1, состоящее только из тех чисел, которые делятся без остатка на простое число 2. Затем удалим множество A_2, содержащее все те и только те числа, которые без остатка делятся на простое число 3. После этого удалим все числа, делящиеся на простое число 5, и т. д. Поскольку каждое натуральное число за исключением единицы делится на какое-нибудь простое число, то из множества A будут удалены все числа, превосходящие число 1. Тогда от всего множества A останется множество, содержащее единственный элемент — число 1:

$$\{1\} = A - A_1 - A_2 - A_3 - \ldots = A - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots).$$

С другой стороны, если из множества A удалить множество A_1, то останется по-прежнему счетное множество $A - A_1$. Из множества $A - A_1$ удалим все элементы множества A_2. Останется также бесконечное счетное множество. Устремим этот процесс в бесконечность. Ясно, что всякий раз будет оставаться счетное множество и множество $A - A_1 - A_2 - A_3 - \ldots$ всегда будет счетным. Следовательно, синглетон $\{1\}$, т. е. множество, содержащее только один элемент, является счетным (бесконечным!) множеством. Но здравый смысл протестует против такого вывода. Где же истина?

6. Является ли счетным пустое множество?

По сравнению с предыдущим этот вопрос кажется еще более странным. Но посмотрим, что скажет логика.

Пусть дано множество A натуральных чисел $\{1,2,3,\ldots\}$. Оно является счетным. Удалим из него сначала число 1, затем удалим число 2, далее — 3, 4 и т. д. Устремим этот процесс в бесконечность и в результате вместо множества A получим пустое множество. Элементы, которые были удалены из множества A, образуют счетное множество B. В сущности, мы выполнили операцию разности множеств: $A \setminus B$. Поскольку множество B состоит из тех же элементов, что и множество A, то

$$A \setminus B = \varnothing. \tag{31}$$

Повторим эту процедуру снова, но обратим внимание на то, что после удаления любого числа из множества A в нем всегда будет оставаться счетное множество элементов. Следовательно,

$$A \setminus B = C, \tag{32}$$

где C — счетное множество элементов, оставшихся в множестве A после удаления из него элементов множества B. Сопоставляя выражения (31) и (32), получаем: $C = \varnothing$, т. е. счетное множество является пустым! Утверждение настолько несуразно, что Вам, вероятно, не потребуется много времени для восстановления истины.

7. Существуют ли пересекающиеся прямые?

Пусть на плоскости дана прямая y (в смысле Евклида). Выберем на той же плоскости какую-нибудь точку a вне этой прямой (рис. 38). Через точку a можно провести несчетное множество прямых. Пересечет ли хотя бы одна из них прямую y? Что за вопрос! Конечно, пересечет. Только одна не пересечет, когда $\alpha = \pi / 2$, а все остальные пересекут. Это говорит здравый смысл. А теперь послушаем логику.

Пусть прямая x проведена так, что угол $\alpha < \pi / 2$. Проведем прямую z перпендикулярно к прямой y (хотя требование перпендикулярности не является обязательным). Получим точки m и n. Очевидно, что между точками m и n континуум точек. При том же значении α плавно переместим вправо прямую z. Точки m и n сблизятся, но между ними по-прежнему будет континуум точек. Еще переместим вправо прямую z. Сколько бы мы ее ни перемещали, между точками m и n всегда будет континуум точек. Если же Вы считаете, что точки m и n все же совпадут, то Вам придется признать, что существует некое настолько «маленькое» несчетное множество, за которым непосредственно следует синглетон, то есть конечное множество, состоящее из одного элемента. Очевидно, что такое предположение совершенно несостоятельно. Во-первых, множество точек любого отрезка является просто несчетным, оно не может быть большим или маленьким. Все такие множества эквивалентны независимо от длин отрезков. Во-вторых, между несчетным и конечным множествами существует промежуточное множество — счетное, а между счетным множеством и синглетоном существуют конечные множества с кардинальными числами, превосходящими единицу. Все это говорит о том, что несчетное множество никак не может следовать непосредственно за синглетоном. Следовательно, точки m и n никогда не совпадут и прямые x и y не пересекутся. По определению [37, с. 12] непересекающиеся прямые параллельны. Так как угол α может быть любым, то всякая прямая, проходящая через точку a, параллельна прямой y. Угол α может быть равным 0° (по Эвклиду это значит, что прямые x и y перпендикулярны), следовательно, перпендикулярные прямые параллельны!

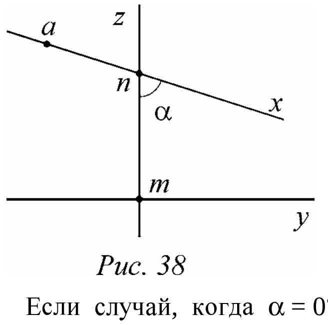


Рис. 38

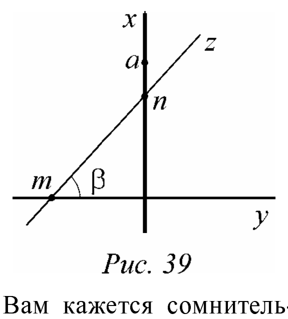


Рис. 39

Если случай, когда $\alpha = 0°$, Вам кажется сомнительным, то обратитесь к рис. 39.

Прямая x проведена через точку a перпендикулярно прямой y. Прямая z проходит через точки m и n, между которыми континуум точек. При перемещении прямой z вправо (угол β не меняется) точки m и n начнут сближаться, но никогда не совпадут по той же причине, что и в предыдущем случае.

Таким образом, если на плоскости расположена прямая y и точка a, находящаяся вне прямой, то никакая прямая, проходящая через точку a, не может пересечь прямую y. А это значит, что пересекающихся прямых не существует вообще! Не существует, следовательно, и всей геометрии, которую изучают в средней школе!

Как Вы думаете, почему возникло такое расхождение между здравым смыслом и логикой?

8. Существуют ли трансфинитные числа?

В подразделе 3.8 показано, что существуют. Посмотрим, достаточно ли обосновано их существование.

Обратимся к рис. 33. На нем показано, что какую бы точку a мы ни взяли на числовой полуоси x, этой точке всегда можно поставить в соответствие единственную точку на отрезке AB (заметим, что отрезок AB параллелен полуоси x). Из рис. 33 следует также, что всякой точке отрезка AB можно поставить в соответствие вполне определенную точку на полуоси x. В подразделе 3.8 задан вопрос: что будет соответствовать точке B отрезка AB? Странный вопрос. Разве ей может что-либо соответствовать? Говорить о соответствии можно лишь в случае параллельности прямой A–a и отрезка AB. А могут ли они стать параллельными? Чтобы прямая A–a, выходящая из точки A до пересечения с полуосью x, оказалась параллельной этой полуоси, она должна где-то от нее оторваться. Но точка a, в которой пересекается прямая A–a с полуосью x, изначально лежит на полуоси x и оторваться от нее в принципе не может. Даже в бесконечности она будет находиться на полуоси x, и прямая A–a никогда не станет ей параллельной. Угол между прямой A–a и отрезком AB будет лишь бесконечно стремиться к нулю, но никогда не будет ему равным. Поэтому точке B отрезка AB не может соответствовать никакое число на полуоси x, ни конечное, ни трансфинитное. Следовательно, трансфинитных чисел не существует! А Вы что думаете об этом?

9. Чем отличается точка от отрезка?

Наш здравый смысл точку настолько хорошо отличает от отрезка, что такой вопрос может показаться бессмысленным. Но вопрос задан. Предлагается ответ.

Обратимся к рис. 30. На нем изображены два отрезка различной длины и показан способ, позволяющий каждой точке короткого отрезка поставить во взаимно однозначное соответствие определенную точку другого (длинного) отрезка. Но это не все. Непосредственно из рисунка видно, что точке a' соответствует не только точка a, но и точка O. Очень интересный момент: если провести другую прямую из вершины O треугольника OCD до пересечения с отрезком CD, то новой паре точек на отрезках AB и CD будет соответствовать все та же точка O. Это относится к любым парам таких точек, следовательно, синглетон эквивалентен множеству точек отрезка любой длины. Но это значит, что отрезок и точка неразличимы. Если Вас не устраивает такой вывод, найдите в рассуждениях все отклонения от истины.

На этом главу о бесконечных множествах закончим. Каждый, кто заинтересуется теорией множеств Г. Кантора, может углубить свои знания, ознакомившись со специальной литературой.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

4.1. Вводные замечания

Считается, что элементами канторовской теории множеств могут быть любые объекты — деревья, насекомые, атомы, окна, числа, фразы и т. д. По утверждению Р. Столла «Множество может состоять, например, из зеленых яблок, **песчинок** или простых чисел» [43, с. 11]. На первый взгляд это действительно так. Например, почему нельзя говорить о множестве песчинок на левом берегу реки Томи в районе города Томска? Интуитивно кажется, что можно. А на самом деле? Выйдем в указанный район и возьмем камешек диаметром, допустим, в 1 мм. Это песчинка? Допустим, что да. Тогда возьмем камешек с бóльшим диаметром. Это песчинка? Допустим, что снова да. Тогда возьмем камешек еще больше и т. д. После нескольких итераций наступит момент, когда мы окажемся не в состоянии признать с достаточной уверенностью, что данный камешек является песчинкой. Следовательно, с математической точки зрения нельзя говорить о множестве песчинок, если отсутствует формальный критерий, при помощи которого все объекты можно было бы однозначно разделить на песчинки и не песчинки.

А что такое берег? В двух метрах от воды — это берег? Допустим, что да. А в пяти, десяти, ста и так далее метрах от воды — это берег? Где начинается берег, если уровень воды в Томи колеблется? И что считать районом города Томска?

Пусть задано множество домов. Как определить элементы, принадлежащие этому множеству? Если по признаку — живут ли в доме люди, то и землянка — дом. По наличию окон? Но у вагона тоже есть окна, а он не дом. Можно ли говорить о множестве хороших книг в библиотеке, множестве интересных фильмов, о множестве высоких людей, о множестве дней, когда была пасмурная погода, и т. д.? С интуитивной точки зрения — это множества, а с математической — нет, и все по той же причине: из-за отсутствия формальных признаков, позволяющих отличать хорошие книги от плохих, интересные фильмы от неинтересных, пасмурную погоду от непасмурной и т. д.

Таким образом, утверждение о том, что в канторовские множества могут входить элементы любой природы, мягко выражаясь, не совсем верно, а это значит, что общность теории множеств Г. Кантора, распространяется далеко не на все объекты, с которыми человеку приходится иметь дело в повседневной практике.

Стремясь преодолеть ограниченность теории множеств Г. Кантора и распространить математические методы на объекты с размытыми, расплывчатыми, нечеткими границами, профессор университета г. Беркли (США) Лофти Заде в 60-х годах прошлого века создал теорию, которую в математической литературе стали называть **теорией нечетких множеств**.

Основу теории Л. Заде составляет понятие **функции принадлежности нечеткого множества**. Областью ее значений является интервал [0;1]. Каждое значение этой функции называется **степенью принадлежности** элемента a данному нечеткому множеству. Например, пусть A — множество высотных домов. Принадлежит ли 10-этажный дом множеству A? Теория Г. Кантора ответа на этот вопрос не дает. А согласно теории Л. Заде можно сказать: 10-этажный дом является элементом множества высотных домов со степенью принадлежности к высотным домам, равной 0,35.

Откуда взялось это число 0,35? Можно ли вместо 0,35 взять другое число, например 0,1 или 0,9? Можно. Выбирается оно либо на основе статистических сведений, либо интуитивно в зависимости от обстоятельств. Если в городе много домов, насчитывающих 50 и более этажей, то степень принадлежности 10-этажного дома множеству A можно уменьшить и до 0,1. Но если, например, 11-этажные дома в городе являются самыми высокими, то степень принадлежности к высотным домам 10-этажного дома может быть равной и 0,9.

Между теориями Г. Кантора и Л. Заде существует прямая связь: теория множеств Г. Кантора является частным случаем теории нечетких множеств Л. Заде. Этот частный случай имеет место всякий раз, когда функция принадлежности принимает одно из крайних ее значений и не принимает никаких других. Если степень принадлежности элемента a множеству A равна единице, то по Г. Кантору $a \in A$. Если же степень принадлежности равна нулю, то $a \notin A$.

Упражнения

1. (ХСС). Укажите канторовские множества:

1) множество большегрузных автомобилей;
2) множество тропинок в лесу;
3) множество продавцов обувного отдела в Томском универмаге;
4) множество студентов в группе;
5) множество хороших баянов;
6) множество сотрудников ТУСУРа, имеющих ученые степени;
7) множество выдающихся артистов России;
8) множество экспонатов на выставке;
9) множество студентов, разбирающихся в электронике.

2. (ХПС). Укажите нечеткие множества:

1) множество слов, произнесенных лектором за 2 часа аудиторных занятий;
2) множество интересных телепередач;
3) множество асфальтированных дорог в Томске;
4) множество книг различных наименований, проданных магазином;
5) множество взрослых щук в реке;
6) множество бурых медведей в зоопарке;
7) множество кентавров, обитающих в Томской области;
8) множество спелых яблок на яблоне;
9) множество офицеров в армии России.

3. (ЕДУ). Какие из следующих чисел могут быть степенью принадлежности элемента нечеткому множеству?

1) 0,001;	4) 2,53;	7) 0,999…;
2) $0{,}01 \cdot 10^{-3}$;	5) $\sqrt{1{,}111}$;	8) $0{,}1 \cdot 10^{20}$;
3) $10 \cdot 10^{-4}$;	6) 14 / 15;	9) $10^{-17} \cdot 10^{18}$.

4.2. Нечеткие множества

Нечеткие множества необходимо как-то отличать от обычных «четких» множеств Г. Кантора. Условимся считать, что заглавная буква обозначает нечеткое множество, если над ней указан знак ~ (тильда), а если тильды нет, то будем считать, что буква обозначает канто-ровское множество [31].

Как задать конечное нечеткое множество? В случае канторовских множеств достаточно перечислить их элементы. Аналогично можно задавать и нечеткие множества, но с некоторыми особенностями. Эти особенности поясним сначала на примере, а затем перейдем к обобщениям.

Пусть дано множество $M = \{x / x$ — число выловленных рыб$\}$. Это обычное множество. Построим на его основе нечеткое множество «очень маленький улов», обозначив его буквой $\tilde{K}$ (будем считать, что рыбу ловили удочкой и что поймана хотя бы одна рыба):

$$\tilde{K} = \{(1/1), (0{,}95/2), (0{,}9/3), (0{,}8/4), (0{,}7/5), (0{,}6/6)\}. \quad (33)$$

Согласно этой записи элементами множества $\tilde{K}$ являются пары чисел, записанные в круглых скобках. Числа отделены одно от другого косой (наклонной) чертой. Справа от черты записаны элементы «четкого» множества M, образующие подмножество

$$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset M.$$

Слева указаны значения функции принадлежности. Прочитать запись множества $\tilde{K}$ можно следующим образом. Улов в одну рыбу является очень маленьким со степенью принадлежности к очень маленьким уловам, равной единице. Это первый элемент множества $\tilde{K}$. Если пойманы две рыбы, то такой улов является очень маленьким со степенью принадлежности к очень маленьким уловам, равной 0,95. Это второй элемент множества $\tilde{K}$ и т. д. Таким образом, нечеткое множество $\tilde{K}$ — это обычное канторовское множество $H \subset M$, но каждый его элемент снабжен числом, показывающим степень принадлежности элемента нечеткому множеству $\tilde{K}$.

Теперь все это же представим в общем виде. Пусть M — произвольное непустое канторовское множество. Тогда его нечетким подмножеством $\tilde{A}$ называется множество пар

$$\tilde{A} = \{(\mu / x) / x \in H \subset M, \quad \mu \in [0;1]\}. \quad (34)$$

Буквой μ в этом выражении обозначена **функция принадлежности** нечеткого множества $\tilde{A}$. Она принимает значения из интервала [0; 1] и зависит от переменной x, значения которой выбираются из множества H. Множество M называется **базовым множеством** (базовой шкалой). Значение функции принадлежности при выбранном $x \in H$ называется **степенью принадлежности** элемента $x \in H$ нечеткому множеству $\tilde{A}$.

Функция принадлежности может быть представлена аналитически как функция аргумента x, но может быть задана набором своих значений, как это записано в выражении (33). В выражении (34) указано множество $H \subset M$. Согласно [31] множество H называется **носителем нечеткого множества** $\tilde{A}$. Можно говорить просто — носителем.

Таким образом, мы ввели следующие понятия:

1) базовое множество M, на основе которого строится нечеткое множество. Оно может содержать любое число элементов. В случае вышеприведенного примера об очень маленьком улове M — это множество натуральных чисел. Базовому множеству в теории Кантора соответствует универсальное множество;

2) носитель нечеткого множества — подмножество H базового множества: $H \subset M$. Носитель образуют только те элементы множества M, для которых степень принадлежности не равна нулю;

3) функция принадлежности, зависящая от переменной $x \in H$ (можно считать, что $x \in M$). В выражении (34) первое число каждой пары — это не сама функция (как аналитическое выражение), а ее значение;

4) степень принадлежности — значение функции принадлежности при $x \in H$;

5) нечеткое множество — множество пар, каждая из которых содержит элемент $x \in H$ и значение функции принадлежности на этом $x \in H$. В записи нечеткого множества элемент $x \in H$ записывается справа от наклонной черты, а значение функции принадлежности — слева.

Упражнения

1. (ШИР). Укажите элементы, образующие носитель в выражении (33).

2. (129). Укажите степень принадлежности элемента 4 множеству $\tilde{K}$ в выражении (33).

3. (МЭН). Какой элемент в выражении (33) имеет наименьшую степень принадлежности множеству $\tilde{K}$?

4. (ЗЫН). Какое значение имеет функция принадлежности для элемента $5 \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ в выражении (33)?

5. (НЭП). Найдите $|\tilde{K}|$ (то есть число элементов) по выражению (33).

4.3. Объединение нечетких множеств

Согласно Г. Кантору в объединение множеств $A \cup B$ входят элементы множества A и элементы множества B. При этом элемент, входящий в оба множества, в объединение множеств включается только один раз. Тот же смысл вкладывается и в операцию объединения нечетких множеств, но с учетом функции принадлежности. Поясним это на примерах, полагая, что

$$M = \{1, 2, \ldots, 8\}.$$

Пример 1. Рассмотрим простейший случай, когда нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержат по одному элементу. Пусть

$$\tilde{A} = \{(0{,}3 / 2)\}; \quad \tilde{B} = \{(0{,}7 / 4)\},$$

тогда их нечеткое объединение примет вид

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(0{,}3 / 2), (0{,}7 / 4)\}.$$

Пример 2. В предыдущем примере элементы множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ являются различными. Теперь рассмотрим случай, когда множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержат один и тот же элемент:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3 / 2)\}; \quad \tilde{B} = \{(0{,}8 / 2)\}.$$

Очевидно, что в объединение $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ войдет этот же единственный элемент. Но с какой степенью принадлежности? Если несколько нечетких множеств содержат один и тот же элемент, но с различными степенями принадлежности, то в объединение множеств этот элемент войдет с той степенью принадлежности, которая является наибольшей среди всех нечетких множеств, входящих в объединение. Следовательно:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B} = \{(0{,}3 / 2)\} \cup \{(0{,}8 / 2)\} = \{(0{,}8 / 2)\}.$$

Пример 3. Пусть нечеткие множества имеют вид:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3 / 1), (0{,}9 / 2), (0{,}5 / 4)\}; \quad (35)$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}6 / 2), (0{,}3 / 3), (0{,}9 / 4), (0{,}75 / 8)\}. \quad (36)$$

Найдем их объединение:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B} = \{(0{,}3 / 1), (0{,}9 / 2), (0{,}3 / 3), (0{,}9 / 4), (0{,}75 / 8)\}. \quad (37)$$

Упражнения

1. (ИМШ). Укажите все элементы носителя множеств (35) и (36).

2. (ТКШ). Укажите все элементы носителя множества (37).

3. (СПИ). Укажите наименьшую и наибольшую степени принадлежности в выражении (37).

4. (ЕИФ). Укажите все элементы в выражении (37), которые имеют наибольшую степень принадлежности.

5. (ЛЭФ). Пусть задано базовое множество

$$M = \{1, 2, \ldots, 9\}$$

и пусть даны нечеткие множества:

$$\tilde{A} = \{(0{,}1 / 1), (1 / 2), (0{,}9 / 3), (0{,}81 / 6)\};$$

$$\tilde{B} = \{(1 / 2), (0{,}8 / 5), (0{,}81 / 6), (0{,}5 / 8)\};$$

$$\tilde{C} = \{(0{,}8 / 3), (0{,}81 / 6), (0{,}81 / 7), (0{,}5 / 8)\}.$$

Найдите элементы множества M, которые образуют носитель нечеткого множества $\tilde{A}\cup\tilde{B}\cup\tilde{C}$.

6. (КУФ). Укажите элементы носителя множества $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ (см. упр. 5).

7. (АДИ). Укажите элементы носителя множества $\tilde{B}\cup\tilde{C}$ (см. упр. 5).

8. (654). Укажите наименьшую и наибольшую степень принадлежности в выражении $\tilde{A}\cup\tilde{C}$ (см. упр. 5).

9. (ЯЛС)! Сколько элементов (см. упр. 5) содержат нечеткие множества $\tilde{A}\cup\tilde{B}$? $\tilde{A}\cup\tilde{C}$? $\tilde{B}\cup\tilde{C}$?

4.4. Пересечение нечетких множеств

Согласно Г. Кантору пересечение множеств A и B — это множество элементов, которые одновременно входят в множества A и B. В таком же смысле пересечение понимается и в теории нечетких множеств, но с учетом особенностей, вносимых функциями принадлежности. Поясним эти особенности, как и в случае объединения нечетких множеств, на примерах, считая, что базовое множество M имеет вид $M = \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Пример 1. Найти пересечение нечетких множеств:

$$\tilde{A} = \{(0{,}6 / 4)\},\ \tilde{B} = \{(0{,}2 / 4)\}.$$

В оба множества входит элемент $4 \in M$, но в первом случае его степень принадлежности равна 0,6, а во втором — 0,2. С какой степенью принадлежности элемент $4 \in M$ войдет в множество $\tilde{A}\cap\tilde{B}$? Если несколько нечетких множеств содержат некоторый элемент a с различными степенями принадлежности, представленными дробными числами из замкнутого интервала [0; 1], то наименьшее из этих чисел есть степень принадлежности элемента a, входящего в пересечение заданных множеств. Следовательно:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B} = \{(0{,}6 / 4) \cap \{(0{,}2 / 4)\} = \{(0{,}2 / 4)\}.$$

Пример 2. Найти пересечение нечетких множеств:

$$\tilde{A} = \{(0{,}6 / 1), (1 / 2), (0{,}4 / 5), (0{,}6 / 6)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}35 / 2), (0{,}3 / 3), (0{,}9 / 6), (0{,}25 / 7)\}.$$

Общими для обоих нечетких множеств являются элементы $2 \in M$ и $6 \in M$. Следовательно:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B} = \{(0{,}35 / 2), (0{,}6 / 6)\}.$$

Пример 3. Найти элементы множества $(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup$ $\cup(\tilde{C}\cap\tilde{D})$, если

$$\tilde{A} = \{(0{,}2 / 2), (0{,}3 / 4), (0{,}6 / 6)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}2 / 2), (0{,}6 / 7), (0{,}7 / 8)\};$$

$$\tilde{C} = \{(1 / 3), (0{,}1 / 4), (0{,}9 / 6), (0{,}9 / 8)\};$$

$$\tilde{D} = \{(1 / 3), (0{,}1 / 5), (0{,}2 / 6), (0{,}9 / 9)\}.$$

Сначала находим пересечения нечетких множеств:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B} = \{(0{,}2 / 2)\};$$

$$\tilde{C}\cap\tilde{D} = \{(1 / 3), (0{,}2 / 6)\}.$$

Затем выполняем операцию объединения:

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{C}\cap\tilde{D}) = \{(0{,}2 / 2), (1 / 3), (0{,}2 / 6)\}.$$

Пример 4. Найти элементы нечеткого множества $\tilde{A}\cap\tilde{B}$, если

$$\tilde{A} = \{(0{,}3 / 1)\}; \quad \tilde{B} = \{(0{,}6 / 2).$$

Эти множества не имеют общих элементов. Представим их в таком виде, чтобы формально они содержали общие элементы:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3 / 1), (0 / 2)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0 / 1), (0{,}6 / 2)\}.$$

Находим пересечение множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B} = \{(0 / 1), (0 / 2) = \varnothing.$$

Очевидно, что если нечеткие множества не имеют общих элементов, то пересечение их пусто.

Упражнения

Пусть базовое множество имеет вид $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$, и пусть даны нечеткие множества:

$$\tilde{A} = \{(0{,}2 / 1), (0{,}2 / 2), (0{,}5 / 5), (0{,}7 /8)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}3 / 3), (0{,}7 / 4), (0{,}7 / 6)\};$$

$$\tilde{C} = \{(0{,}2 / 4), (0{,}5 / 5), (0{,}7 / 8)\};$$

$$\tilde{D} = \{(0{,}1 / 6), (0{,}8 / 7), (0{,}8 / 8)\}.$$

Используя эти множества в качестве исходных данных, выполните нижеследующие упражнения 1—3.

1. Найдите наименьшее значение функции принадлежности для множеств:

(ПШО). $\tilde{A}\cap\tilde{B}$; (288). $\tilde{A}\cap\tilde{C}\cap\tilde{D}$;

(ТУП). $\tilde{A}\cap\tilde{C}$; (КНШ). $\tilde{B}\cap\tilde{C}\cap\tilde{D}$;

(38Н). $\tilde{C}\cap\tilde{D}$; (ПИХ). $\tilde{A}\cap\tilde{B}\cap\tilde{D}$.

2. Найдите носитель для нечетких множеств:

(ЧАФ). $\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})$; (АНИ). $\tilde{B}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$;

(АФХ). $\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})$; (ТЕШ). $\tilde{B}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})$;

(П23). $\tilde{C}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{D})$; (АМК). $(\tilde{A}\cap\tilde{C})\cup\tilde{B}$.

3. Найдите наименьшую и наибольшую степени принадлежности:

(ШЕЛ)! $\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B})$; (ФТЯ)! $\tilde{A}\cap\tilde{B}\cap\tilde{C}$;

(РЯМ)! $\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$; (ЯРБ)! $\tilde{B}\cap\tilde{C}\cap\tilde{D}$;

(АНО)! $\tilde{B}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})$; (КАГ)! $\tilde{A}\cap\tilde{C}\cap\tilde{D}$.

4. (ООД). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что носитель — это канторовское множество?

2) возможны ли случаи, когда $M\subset H$, где M — базовое множество, H — носитель?

3) верно ли, что пустое множество — любое нечеткое множество с функцией принадлежности, равной нулю на всем базовом множестве?

4) возможны ли случаи, когда $M = H$, где M — базовое множество, H — носитель?

5) может ли функция принадлежности принимать значения, большие единицы?

6) верно ли, что значение функции принадлежности и степень принадлежности — это одно и то же?

7) может ли функция принадлежности принимать целые значения?

5. (ОЦХ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что множество, из которого может принимать значения функция принадлежности, является несчетным?

2) верно ли, что если степень принадлежности элемента равна единице, то этот элемент не входит в заданное множество?

3) если $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — непустые нечеткие множества, то возможны ли случаи, когда пересечение этих множеств является пустым?

4) если $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — непустые нечеткие множества, то возможны ли случаи, когда объединение этих множеств является пустым?

5) верно ли, что пересечение пустого множества и непустого нечеткого множества пусто?

6) всегда ли справедливо равенство $\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B})=\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — произвольные нечеткие множества?

7) всегда ли справедливо равенство $\tilde{A}\cap(\tilde{A}\cup\tilde{B})=\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — произвольные нечеткие множества?

4.5. Дополнение нечеткого множества

Пусть даны базовое множество $M = \{1, 2, \ldots, 7\}$ и нечеткое множество $\tilde{A} = \{(0{,}3 / 1), (0{,}7 / 3), (0{,}9 / 6)\}$.

Носителем этого нечеткого множества является канторовское множество $H = \{1,3,6\}$. Чтобы найти дополнение множества $\tilde{A}$, сначала необходимо расширить носитель до базового множества. Для этого в множество $\tilde{A}$ включим все недостающие элементы и каждому из них присвоим нулевые значения функции принадлежности. Тогда заданное множество $\tilde{A}$ примет вид

$$\tilde{A} = \{(0{,}3 / 1), (0 / 2), (0{,}7 / 3), (0 / 4), (0 / 5), (0{,}9 / 6), (0 / 7)\}.$$

Но это еще не дополнение. Для его нахождения заменим в каждой паре множества $\tilde{A}$ число μ_i на разность $1-\mu_i$, где μ_i — значение функции принадлежности элемента $i \in M$. В результате получим искомое дополнение:

$$\overline{\tilde{A}} = \{(0{,}7 / 1), (1 / 2), (0{,}3 / 3), (1 / 4), (1 / 5), (0{,}1 / 6), (1 / 7)\}.$$

В этом примере степень принадлежности каждого элемента множества $\overline{\tilde{A}}$ не равна нулю, так как в $\tilde{A}$ функция принадлежности ни для одного элемента не принимает единичное значение. Следовательно, если в заданное нечеткое множество $\tilde{A}$ входит элемент $x \in M$ со степенью принадлежности, равной единице, то в дополнение этот элемент войдет с нулевой степенью принадлежности, то есть будет отсутствовать в множестве $\overline{\tilde{A}}$. Рассмотрим пример для $M = \{1,2,\ldots,7\}$:

$$\tilde{A} = \{(1 / 1), (0{,}2 / 2), (0{,}9 / 4), (1 / 5), (1 / 6)\}.$$

В дополнение этого нечеткого множества не входят элементы 1, 5, 6 $\in M$:

$$\overline{\tilde{A}} = \{(0 / 1), (0{,}8 / 2), (1 / 3), (0{,}1 / 4), (0 / 5), (0 / 6), (1 / 7)\} = \{(0{,}8/ 2), (1 / 3), (0{,}1 / 4), (1 / 7)\}.$$

Упражнения

Исходными данными являются множества:

$M = \{1, 2, \ldots, 8\}$;

$\tilde{A} = \{(0{,}6 / 2), (0{,}6 / 3), (0{,}1 / 5), (0{,}9 /7)\}$;

$\tilde{B} = \{(1 / 1), (1 / 2), (0{,}1 / 4), (0{,}7 / 6), (0{,}9 / 8)\}$;

$\tilde{C} = \{(0{,}3 / 1), (0{,}4 / 3), (1 / 4), (1 / 5), (1 / 6), (0{,}8 / 8)\}$;

$\tilde{D} = \{(0{,}2 / 1), (1 / 2), (1 / 3), (0{,}4 / 4), (0{,}7 / 6), 1 / 8)\}$.

1. Найдите носитель для множеств:

(КЛЕ). $\overline{\tilde{A}}$; (МУХ). $\overline{\tilde{B}}$; (ТЛЗ). $\overline{\tilde{C}}$; (634). $\overline{\tilde{D}}$.

2. Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна 1, в случае множеств:

(ИКШ). $\overline{\tilde{A}}$; (ХТК). $\overline{\tilde{B}}$; (ПАЛ). $\overline{\tilde{C}}$; (АНЫ). $\overline{\tilde{D}}$.

3. Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна нулю, в случае множеств:

(ЮХН). $\overline{\tilde{B}}$; (860). $\overline{\tilde{C}}$; (АРП). $\overline{\tilde{D}}$.

4. Найдите носители множеств:

(ЭЦБ). $\overline{\tilde{A}}\cup\overline{\tilde{B}}$; (ДВВ). $\overline{\tilde{B}}\cup\overline{\tilde{D}}$; (ТЕТ). $\overline{\tilde{B}}\cap\overline{\tilde{D}}$;

(ПФУ). $\overline{\tilde{B}}\cup\overline{\tilde{C}}$; (ТКФ). $\overline{\tilde{A}}\cap\overline{\tilde{C}}$; (ХОХ). $\overline{\tilde{C}}\cap\overline{\tilde{D}}$.

5. Найдите множество $\tilde{A}\cup\overline{\tilde{A}}$. Укажите степень принадлежности множеству $\tilde{A}\cup\overline{\tilde{A}}$ элементов:

(ЦИД). 1, 2 $\in M$; (ЯЖД). 3, 4, 5 $\in M$; (МХЕ). 6, 7, 8 $\in M$.

6. Найдите множество $\tilde{B}\cup\overline{\tilde{B}}$.

(АРЗ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна единице.

(ЖНИ). Укажите наименьшее значение функции принадлежности.

(АЙЦ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна 0,9.

7. Найдите множество $\tilde{C}\cap\overline{\tilde{C}}$.

(245). Найдите носитель множества $\tilde{C}\cap\overline{\tilde{C}}$.

(595). Укажите наименьшую (не равную нулю) и наибольшую степени принадлежности.

(ПЕК)! Укажите степени принадлежности элементов $2\in M$, $3\in M$, $4\in M$.

8. Найдите множество $\tilde{D} \cap \overline{\tilde{D}}$.

(ТЭЛ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна нулю.

(5ПЛ). Укажите наименьшую (не равную нулю) и наибольшую степени принадлежности.

(АУМ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых не равна нулю.

9. (ЕХМ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что пересечение нечеткого множества с его дополнением есть пустое множество?

2) верно ли, что универсальному канторовскому множеству в теории нечетких множеств соответствует базовое множество?

3) верно ли, что объединение нечеткого множества и его дополнения есть базовое множество?

4) верно ли, что в дополнение нечеткого множества входят только элементы $x \in M$, отсутствующие в исходном нечетком множестве?

5) если степень принадлежности всех элементов нечеткого множества при $H = M$ равна единице, то верно ли, что дополнение этого множества пусто?

6) существуют ли нечеткие множества, для которых справедливо $\tilde{A} = \overline{\tilde{A}}$?

7) существуют ли нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, для которых справедливо $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$?

4.6. Разность и симметрическая разность нечетких множеств

Для нахождения разности $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$ нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ никакой новой информации не потребуется, так как разность может быть выражена через вышеуказанные операции дополнения и пересечения:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}.$$

Проиллюстрируем это на примере. Пусть

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$\tilde{A} = \{(0{,}6 / 1), (0{,}5 / 2), (1 / 4), (0{,}2 / 6)\}$;

$\tilde{B} = \{(0{,}8 / 1), (0{,}5 / 2), (1 / 3), (0{,}4 / 5)\}$.

Найдем их дополнения:

$\overline{\tilde{A}} = \{(0{,}4 / 1), (0{,}5 / 2), (1 / 3), (1 / 5), (0{,}8 / 6)\}$;

$\overline{\tilde{B}} = \{(0{,}2 / 1), (0{,}5 / 2), (1 / 4), (0{,}6 / 5), (1 / 6)\}$.

Тогда разность $\tilde{A} - \tilde{B}$ примет вид

$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}} = \{(0{,}2 / 1), (0{,}5 / 2), (1 / 4), (0{,}2 / 6)\}$.

Аналогично находим разность $\tilde{B} \setminus \tilde{A}$:

$\tilde{B} - \tilde{A} = \tilde{B} \cap \overline{\tilde{A}} = \{0{,}4 / 1), (0{,}5 / 2), (1 / 3), (0{,}4 / 5)\}$.

Для нахождения симметрической разности нечетких множеств также не требуется никакой новой информации, так как симметрическая разность может быть выражена через рассмотренные выше операции пересечения, объединения и дополнения:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\tilde{A} - \tilde{B}) \cup (\tilde{B} - \tilde{A}) = (\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}) \cup (\tilde{B} \cap \overline{\tilde{A}}).$$

4.7. Основные свойства операций над нечеткими множествами

Все нижеперечисленные свойства операций над нечеткими множествами почти не отличаются от рассмотренных в первом разделе свойств операций над канторовскими множествами, поэтому весь материал данного подраздела представлен в весьма кратком изложении.

При обозначении множеств будем считать, что $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ — произвольные нечеткие множества, M — базовое множество (канторовское). Знак равенства будем использовать для обозначения равносильности. (В [31] для этих целей применяется знак $\approx$.)

Наиболее важными из всех изученных в настоящее время свойств являются следующие:

1) **инволюция**: дополнение дополнения нечеткого множества $\tilde{A}$ есть само множество $\tilde{A}$:

$$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A};$$

2) **идемпотентность** пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}; \quad \tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}.$$

3) **коммутативность** пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}; \quad \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}.$$

Благодаря коммутативности буквы, обозначающие нечеткие множества, можно записывать в любом порядке, если они соединены знаком пересечения либо объединения;

4) **ассоциативность** пересечения и объединения:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = \tilde{B} \cap (\tilde{A} \cap \tilde{C}) = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C};$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = \tilde{B} \cup (\tilde{A} \cup \tilde{C}) = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C};$$

5) **дистрибутивность пересечения** относительно объе-динения:

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$

и **дистрибутивность объединения** относительно пересечения:

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C});$$

6) законы де Моргана:

$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}; \quad \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}.$$

Кроме перечисленных, приведем еще ряд свойств:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \cup \varnothing = \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \cap \varnothing = \varnothing;$$

$$\tilde{A} \cup M = M;$$

$$\tilde{A} \cap M = \tilde{A}.$$

На этом завершим не только раздел «Элементы теории нечетких множеств», но и вообще всю тему о множествах. Рассмотренного материала при надлежащем его освоении вполне достаточно для первого знакомства с вводными понятиями такого раздела современной математики, как теория множеств. Каждый, кто изъявит желание более основательно ознакомиться с теми или иными разделами теории множеств, всегда может обратиться к специальной литературе.

БУЛЕВА АЛГЕБРА

ВВЕДЕНИЕ

Булева алгебра, и особенно та ее часть, которую называют прикладной **алгеброй логики**, в настоящее время получила такое развитие, что в рамках небольшого учебного пособия даже кратко осветить все ее направления совершенно невозможно, в связи с чем в пособие включены лишь те разделы (всего их 10), которые имеют наибольшее практическое значение. В этих 10 разделах содержится более 1100 упражнений. Все они, как и упражнения раздела «Теория множеств», закодированы в системе кодов ИДС «Символ».

При самоконтроле с использованием устройств «Символ» необходимо действовать следующим образом:

1) включить устройство и нажать кнопку СБРОС;

2) ввести код задания. Он указан в круглых скобках перед условиями задач. Сами скобки не вводить;

3) набрать ответ;

4) нажать кнопку КОНТРОЛЬ. Если загорится индикатор ПРАВИЛЬНО, то ответ признаётся верным. Если будет гореть индикатор НЕПРАВИЛЬНО, ответ является неверным.

При наборе ответов необходимо учитывать следующее:

1) все коды заданий представлены на русском языке, поэтому при их вводе необходимо пользоваться буквами русского алфавита;

2) если после кода задания вместо точки стоит «!» (восклицательный знак), то это является напоминанием, что под данным кодом задания представлен не один вопрос, а несколько, и что прежде чем нажимать кнопку КОНТРОЛЬ, необходимо ввести ответы на все эти вопросы: сначала набирается ответ на первый вопрос, затем — на второй, на третий и т. д.;

3) все формулы вводятся с использованием букв латинского и греческого алфавитов;

4) при вводе инверсных букв сначала необходимо нажать кнопку со знаком отрицания (горизонтальной чёрточкой), а затем — кнопку, соответствующую самой букве. Например, если ответ имеет вид $\overline{A}B\overline{C}$, то набирается он в последовательности: *–AB–C*;

5) при вводе конъюнкций, дизъюнкций и их сочетаний буквы необходимо упорядочить по алфавиту, знак конъюнкции не вводится. Например, если ответом является формула $\overline{B}+A+CD$, то последовательность набора имеет вид *A+–B+CD*;

6) если ответом являются наборы десятичных или двоичных чисел, то перед вводом в устройство их необходимо упорядочить по возрастанию;

7) если ответом является сумма или набор минтермов, представленных в алгебраической форме, то перед вводом минтермы необходимо упорядочить по возрастанию их десятичных индексов. Пусть, например, ответ имеет вид

$$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}.$$

Правильной является последовательность вида $\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$, так как минтермы, образующие эту последовательность, через их индексы записываются следующим образом: $m_3+m_4+m_6$;

8) если ответом является набор некоторых символов или их сочетаний, то вводятся они без использования запятой и точки с запятой. Пусть, например, ответ имеет вид B, A, $P\overline{Q}$, $\overline{C}D$. В устройство необходимо вводить *AB–CDP–Q*, где черточки обозначают знаки инверсии;

9) при вводе букв с индексами необходимо набирать только буквы и индексы, располагая их после соответствующих букв. Например, если ответ представлен в виде $A_1+A_3+\overline{A}_5A_6$, то ввод осуществляется следующим образом: *A*1+*A*3+–*A*5*A*6, где черточка обозначает инверсию переменной A_5;

10) степень набирается с использованием знака ↑. Например, формулу 3^n вводить необходимо в следующей последовательности: 3↑*n*;

11) формула $\log_2 m$ вводится тремя кнопками в том порядке, в каком она записана: сначала нажимается кнопка log, затем — 2, после чего — *m*, т. е.: log2*m*.

Перечисленные правила являются основными. В частных же случаях, не подпадающих под эти правила, пояснения даются после формулировок упражнений, поэтому здесь они не приводятся.

1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Двоичные числа

Всякое число N в позиционной системе счисления с основанием q можно представить в виде полинома

$$N=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+a_{n-2}q^{n-2}+\ldots+a_1q^1+a_0q^0.$$

Коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, стоящие перед степенями, изображают цифры системы счисления. Количество цифр при основании q равно q, т. е. каждый из коэффициентов может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Если $q = 10$, то коэффициенты могут принимать десять значений $0, 1, 2, \ldots, 9$ (десятичная система).

В технике, наряду с десятичной, большое распространение получила двоичная система счисления. Основание двоичной системы равно двум, следовательно, в ней имеется только две цифры: 0 и 1. Этими двумя цифрами можно записать любое число.

Перевод десятичного числа в двоичную систему поясним на примере числа 37:

37	1
18	0
9	1
4	0
2	0
1	1

В левой колонке каждое следующее число меньше предыдущего вдвое. Если число не делится на два, то его необходимо уменьшить на единицу. В правой колонке единицами отмечены нечётные числа, нулями — чётные. Читая снизу вверх цифры правой колонки, получаем искомое двоичное число:

$$37\big|_{10}=100101\big|_2.$$

Для перевода (n + 1)-разрядного двоичного числа в десятичное можно воспользоваться развёрнутой записью числа двоичной системы:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Переведём в десятичную систему двоичное число 100101. Согласно его записи имеем:

$$n = 5; \quad a_0 = a_2 = a_5 = 1; \quad a_1 = a_3 = a_4 = 0.$$

Тогда получим:

$$100101|_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 32 + 4 + 1 = 37|_{10}.$$

Над двоичными числами можно выполнять те же операции, что и над десятичными. Главной из них является операция сложения.

Сложение двоичных чисел осуществляется поразрядно, с запоминанием единиц переноса, точно так же, как и в десятичной системе. Поясним это на примере. Пусть $a = 101011$, $b = 101110$, найдём их сумму a + b.

Запишем числа a и b одно под другим, совместив младшие разряды:

+	1	0	1	0	1	1	— число a
	1	0	1	1	1	0	— число b
1	0	1	1	0	0	1	— число $a + b$
	(1)	(0)	(1)	(1)	(1)	(0)	— переносы

Как и в десятичной системе, суммирование начинаем с младшего разряда:

а) 1 + 0 = 1, переноса нет, под цифрой 1 (младший разряд числа a + b) записываем в скобках нуль;

б) во втором разряде суммируются единицы: 1 + 1 = 10, т. е. сумма равна нулю и есть единица переноса. Записываем её под результирующим нулём второго разряда суммы;

в) в третьем разряде 0 + 1 = 1, но ещё надо прибавить единицу переноса из второго разряда, тогда 0 + 1 + 1 = 10. Снова сумма равна нулю и есть единица переноса;

г) в четвёртом разряде суммируются две единицы и к ним прибавляется единица переноса из третьего разряда: 1 + 1 + 1 = 11. В результате сумма равна 1 и есть единица переноса;

д) в пятом разряде 0 + 0 + 1 = 1, т. е. сумма равна единице, переноса нет;

е) в шестом разряде 1 + 1 = 10. Сумма равна нулю, а единица переноса образует седьмой разряд суммы a + b. Это эквивалентно записи $0 + 0 + 1 = 1$, если числа a и b записать в виде $a = 0101011$, $b = 0101110$, т. е. удлинить их путём приписывания слева нулей.

Другие арифметические операции рассматривать не будем, так как в дальнейшем изложении материала они не понадобятся.

Упражнения

1. Переведите в десятичную систему счисления двоичные числа:

(МОЛ). 10010; (ТМЕ). 10011110;
(ОЗН). 1011100; (ЗШУ). 10000000;
(КВК). 1110001; (АУТ). 10001000;
(ЗОИ). 10000001; (ХЦС). 11111111;
(БВХ). 11010001; (59Р). 11111100.

2. Переведите в двоичную систему десятичные числа:

(УСЕ). 12; (ЛВ5). 25; (149). 64;
(992). 10; (ПВК). 32; (АХА). 60;
(353). 16; (АХ7). 30; (ШНБ). 31;
(624). 17; (968). 49; (ШЛВ). 63.

3. Представьте сумму двоичных чисел в двоичной системе:

(891). 1010 + 1101; (ПТ5). 1111 + 100;
(РТ2). 1100 + 1000; (ПВ6). 11111 + 1;
(КЗ3). 1001 + 10000; (ЕВ7). 10 + 10100.

4. Вместо крестиков поставьте двоичные знаки, если:

(ЗРА). $11{\times}0{\times}{\times}0|_2 = 112|_{10}$; (КОП). ${\times}{\times}{\times}0000|_2 = 80|_{10}$;
(ЕЯТ). $1{\times}{\times}1{\times}{\times}11|_2 = 255|_{10}$; (УИК). ${\times}0{\times}{\times}0{\times}1|_2 = 67|_{10}$;
(ХАН). ${\times}{\times}000{\times}{\times}0|_2 = 128|_{10}$; (ОКО). ${\times}{\times}000{\times}{\times}|_2 = 96|_{10}$.

5. (ГАР). Перечислите все двоичные четырёхзначные числа, содержащие точно одну единицу. Их десятичные эквиваленты введите в устройство (по возрастанию).

6. Представьте в десятичной системе двоичные числа:

(ОСС)! 0110; 0111; 1001; 0001; 1110;
(МХТ)! 1101; 1010; 0100; 1000; 0011;
(ВММ)! 0001; 1000; 0100; 1011; 0101.

7. Укажите десятичные числа, двоичные эквиваленты которых содержат точно две единицы:

(ТЗС). 3 7 9 12 15; (ЛЕЮ). 3 8 9 14 18;
(ММЕ). 1 4 6 13 14; (КАЯ). 6 10 13 17 19;
(ТЗА). 2 3 5 8 12; (ТЗИ). 3 10 20 24 28.

8. (ОХО). Введите в устройство двоичные эквиваленты одноразрядных десятичных чисел, являющихся простыми числами.

9. В результате замены крестиков единицами или нулями будут получаться различные двоичные числа. Все их десятичные эквиваленты введите в устройство в порядке возрастания. (Например: запись 1××0 даёт числа: 8, 10, 12, 14.)

(ШЛА). 11× ; (ЕКТ). ××0× ; (ОУФ). ×11× ;
(ИРИ). 010× ; (ШАК). ××11; (КМ2). ×00× ;
(РЯО). 01×× ; (УМР). 0××0 ; (ШУЗ). 0××1;
(ИЛМ). ×0×1; (ОХС). 0××× ; (КР4). ×××0 .

10. (85Я). Сколько существует 10-разрядных двоичных чисел?

1.2. Понятие высказывания

Высказывание — это некоторое утверждение в виде повествовательного предложения, по содержанию которого можно сказать, истинно оно или ложно. Примеры истинных высказываний: «Река Волга впадает в Каспийское море»; «Существуют чётные числа, делящиеся на 3»; «Луна — спутник Земли». Примеры ложных высказываний: «В Томске водятся кентавры»; «Варшава — столица Японии»; «Всемирно известную сказку «Конёк-горбунок» написал один из десятиклассников 30-й школы г. Томска».

Существуют утверждения, которые меняли свою истинность по мере развития науки. Например: «Солнце вращается вокруг Земли». Это высказывание длительное время считалось истинным. Теперь же оно ложно.

Встречаются утверждения, относительно истинности которых невозможно сказать что-либо определённое ввиду отсутствия способов их доказательства или опровержения. Например: «Между людьми существует телепатическая связь». По мере развития науки это утверждение может стать либо истинным, либо ложным.

В некоторых случаях утверждения объявляются истинными без каких-либо объяснений и доказательств. Например: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данной». Это утверждение Евклида. А Н.И. Лобачевский [28, с. 43; 49, с. 9—10] о том же утверждает совсем другое: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести сколько угодно прямых, не пересекающих данной». Во втором высказывании утверждается нечто, противоположное первому. Однако оба высказывания истинны! Возможно ли это? Да. Оба высказывания являются аксиомами, которые, как известно, принимаются истинными без доказательств.

Таким образом, утверждения могут быть истинными, ложными и не истинными и не ложными одновременно. Мы в дальнейшем будем рассматривать только такие утверждения, которые являются либо истинными, либо ложными. Для удобства высказывания условимся обозначать латинскими буквами. Например, можно считать, что A — это высказывание «Идёт дождь». Если оно является истинным, то пишут $A = 1$. Соответственно запись $A = 0$ обозначает: высказывание «Идёт дождь» ложно.

Всякая буква, обозначающая некоторое высказывание, — это переменная величина, принимающая одно из двух значений — либо 0, либо 1. **Такую переменную называют двоичной.**

Упражнения

1. (ОАВ). Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) если оно упадёт, то оно разобьётся;
2) река Лена впадает в море Лаптевых;
3) широкая лента шире узкой;
4) А.С. Пушкин — русский поэт XIX века;
5) случается, что стреляет и незаряженное ружьё;
6) знание только тогда знание, когда оно приобретено усилием мысли, а не памятью.

2. (ЗШМ). Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) в нашей Галактике, кроме планеты Земля, существуют другие планеты, на которых есть жизнь;
2) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов;
3) операция арифметического сложения коммутативна;
4) всё делать честно — выгоднее;
5) существует загробная жизнь;
6) на ровном месте можно упасть и сломать ногу.

3. (БМК). Укажите номера утверждений, которые не являются истинными и не являются ложными:

1) человек произошёл от обезьяны;
2) мы с вами все — очень хорошие люди;
3) и куда это тебя занесло?
4) инопланетяне когда-нибудь посетят нашу Землю;
5) в ночь на 1 января всегда идёт снег.

4. (УКР). Укажите номера утверждений, которые могут быть истинными (при определённых условиях):

1) на улице идёт дождь;
2) 101 + 11 = 1000;
3) все простые числа нечётные;
4) и заяц научится спички зажигать, если его долго бить;
5) площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей.

1.3. Аксиомы булевой алгебры

Джордж Буль — ирландский математик и логик (1815—1864) — впервые сформулировал основные положения алгебры логики.

В булевой алгебре операции выполняются не над числами, а над высказываниями, представленными двоичными переменными. В результате получаются сложные высказывания. Эти сложные высказывания записываются в виде формул, также носящих двоичный характер.

Двоичная переменная в булевой алгебре определяется следующими аксиомами [23, с. 50]:

$$A = 1, \text{ если } A \neq 0; \quad A = 0, \text{ если } A \neq 1.$$

В обычной алгебре (школьной) над переменными выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и т. д. В булевой же алгебре основными являются только три операции. Их называют **дизъюнкция**, **конъюнкция**, **инверсия**.

Операция дизъюнкции обозначается знаком $\vee$, который ставится между двумя переменными: $A \vee B$. Однако, если учесть некоторое сходство операции дизъюнкции с арифметическим сложением, то вместо знака $\vee$ можно писать знак обычного арифметического сложения, не забывая, разумеется, что знак плюс обозначает дизъюнкцию: $A + B$. Этим знаком мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Операция дизъюнкции, называемая иногда логическим сложением, определена следующими аксиомами [23, с. 51]:

$$0 + 0 = 0; \quad 0 + 1 = 1; \quad 1 + 0 = 1; \quad 1 + 1 = 1.$$

Первые три аксиомы согласуются с обычной арифметикой. А вот четвёртая может вызвать недоумение. Здесь необходимо иметь в виду, что единица обозначает не количество, а тот факт, что некоторое утверждение является истинным. Например, пусть A обозначает: «На улице тепло»; B — «Светит солнце». Что будет обозначать $A + B$? Это сложное высказывание: «На улице тепло или светит солнце». Оно истинно, если $A = 1$, или $B = 1$, или $A = B = 1$. В связи с тем, что в сложном высказывании два простых высказывания соединены союзом ИЛИ, дизъюнкцию иногда называют операцией ИЛИ.

Рассмотрим вторую операцию — конъюнкцию. Она обозначается знаками $\wedge$, &. Но, как и в случае дизъюнкции, этими знаками лучше не пользоваться. Конъюнкция — «родня» арифметическому умножению, поэтому вместо знака $\wedge$ будем использовать точку: $A \cdot B$ либо вообще не указывать никакого знака. При этом надо помнить, что если две буквы записаны рядом без какого-либо знака, то это значит, что они соединены знаком конъюнкции: $A \wedge B = A \cdot B = AB$.

Операция конъюнкции (логическое умножение) определяется следующими аксиомами [23, с. 51]:

$$0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Вернёмся к предыдущему примеру и рассмотрим сложное высказывание AB. Что оно обозначает? В отличие от дизъюнкции конъюнкция AB читается так: «На улице тепло и светит солнце». Два простых высказывания соединены союзом И, поэтому конъюнкцию нередко называют операцией И.

Третья операция — инверсия, или отрицание. Она обозначается чертой над буквой: $\overline{A}$. Например, если A — это «На улице темно», то $\overline{A}$ — «На улице не темно».

Инверсия определяется следующими аксиомами:

$$\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0.$$

т. е. отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь.

Таким образом, полный список аксиом, которыми будем пользоваться в дальнейшем, имеет вид:

$$0+0=0; \tag{1}$$
$$0+1=1; \tag{2}$$
$$1+0=1; \tag{3}$$
$$1+1=1; \tag{4}$$
$$0\cdot 0=0; \tag{5}$$
$$0\cdot 1=0; \tag{6}$$
$$1\cdot 0=0; \tag{7}$$
$$1\cdot 1=1; \tag{8}$$
$$\overline{0}=1; \tag{9}$$
$$\overline{1}=0. \tag{10}$$

В литературе встречаются иные системы аксиом булевой алгебры. Например, Р. Сикорский [24, с. 75] в список своих аксиом включает свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и др. Ещё одним примером является система аксиом Хантингтона, изложенная в [44]. По мнению автора, наиболее естественной является система аксиом, приведённая в [23]. По этой причине она и взята за основу в данном пособии.

Упражнения

1. (1ПЛ). Укажите номера аксиом, относящихся к дизъюнкции:

1) 0 + 0 = 0; 3) $\overline{1}=0$; 5) 1 + 1 = 1;
2) $1\cdot 1\neq 0$; 4) 1 + 0 = 1; 6) $1\cdot 0=0$.

2. (ЛКК). Укажите номера верных записей:

1) 1 + 0 = 1; 3) 0 + 1 = 0; 5) $1\cdot 1=1$;
2) $1\cdot 0=0$; 4) 1 + 1 = 1; 6) $0\cdot 1\neq 0$.

3. (АДМ). Укажите номера аксиом, относящихся к конъюнкции:

1) $0\cdot 1=0$; 3) $\overline{1}=0$; 5) 0 + 0 = 0;
2) 1 + 0 = 1; 4) $0\cdot 0=0$; 6) $1\cdot 1=1$.

4. (ЖИУ). Укажите номера верных записей:

1) $1+0=1\cdot 0$; 3) $1+1=1\cdot 1$; 5) $1+0=0+1$;
2) $0+1\neq 0\cdot 1$; 4) $1\cdot 1=1+0$; 6) $1+0\neq 1+1$.

5. (2ДБ). Укажите номера верных записей:

1) $\overline{1}=1\cdot 1$; 3) $\overline{0}\neq 0\cdot 1$; 5) $\overline{1}\neq 0\cdot 1$;
2) $\overline{0}=1+1$; 4) $\overline{1}\neq\overline{0}$; 6) $\overline{1}=1+0$.

6. (РОН). Укажите номера верных записей:

1) $1+0+\overline{1}=1\cdot 1+\overline{1}$; 4) $0+\overline{0}=1\cdot 0+0\cdot 1$;
2) $\overline{1}+0=\overline{0}+\overline{1}$; 5) $0+\overline{0}+1=1+\overline{1}+0$;
3) $0+1+\overline{0}=0\cdot 0+\overline{0}$; 6) $0\cdot 1\cdot 1=\overline{1}+0\cdot 1$.

7. (ННИ)! Найдите значения выражений:

1) $0+1+1+0$; 3) $\overline{0}+1+0$;
2) $0+0+\overline{1}+\overline{1}$; 4) $1\cdot\overline{1}+\overline{0}\cdot 1$.

1.4. Свойства дизъюнкции и конъюнкции

Рассмотрим следующие основные свойства:

а) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **коммутативности**:

$$A+B=B+A;\quad AB=BA;$$

б) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **ассоциативности**:

$$(A+B)+C=A+(B+C);\quad (AB)C=A(BC),$$

что позволяет удалять скобки:

$$(A+B)+C=A+B+C;\quad (AB)C=ABC;$$

в) **конъюнкция дистрибутивна** относительно дизъюнкции: $A(B+C)=AB+AC$, что позволяет раскрывать скобки в выражениях, например:

$$A(B+C+D+E)=AB+AC+AD+AE,$$

и выносить общий множитель за скобки:

$$ABC+ABD+ABEF=AB(C+D+EF);$$
$$AB+ADE+ACD+BCD=A(B+DE)+CD(A+B);$$

г) **дизъюнкция дистрибутивна** относительно конъюнкции:

$$A+BC=(A+B)(A+C);$$
$$A+BCD=(A+B)(A+C)(A+D);$$
$$A+BCDE=(A+B)(A+C)(A+D)(A+E) \text{ и т.д.};$$

д) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **идемпотентности**: $A+A=A$; $A\cdot A=A$, откуда следует, что в булевых многочленах нет ни коэффициентов, ни степеней.

Эти свойства легко доказываются при помощи системы аксиом. Докажем, например, справедливость утверждения: дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции. Доказательство представим в виде табл. 1.

Таблица 1

A	B	C	$A+BC$	$(A+B)(A+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

В левой части таблицы перечислим все возможные наборы значений трёх переменных, в правой — выделим две колонки. Первую озаглавим выражением $A+BC$, вторую — $(A+B)(A+C)$. Первый набор состоит из трёх нулей. Следовательно, $A=B=C=0$. Подставим эти значения в первое и второе выражения. Тогда получим:

$$A+BC=0;\qquad (A+B)(A+C)=0,$$

т. е. на наборе значений переменных, когда все три переменные равны нулю, утверждение справедливо.

Точно так же перебираем остальные наборы значений переменных и заполняем правую часть таблицы. Получим две равные между собой колонки. Это значит, что на каждом наборе значений переменных выражения $A+BC$ и $(A+B)(A+C)$ принимают одинаковые значения. Следовательно, утверждение «дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции» справедливо.

1.5. Теоремы одной переменной

Список теорем одной переменной имеет вид:

$$A+0=A; \tag{11}$$
$$A\cdot 0=0; \tag{12}$$
$$A+1=1; \tag{13}$$
$$A\cdot 1=A; \tag{14}$$
$$A+A=A; \tag{15}$$
$$A\cdot A=A \tag{16}$$
$$A+\overline{A}=1; \tag{17}$$
$$A\cdot\overline{A}=0; \tag{18}$$
$$\overline{\overline{A}}=A. \tag{19}$$

Все теоремы одной переменной доказываются при помощи аксиом путём перебора значений переменной. Например, докажем справедливость теоремы (11).

Пусть $A = 0$, тогда получим $0 + 0 = 0$, что является верным утверждением согласно аксиоме (1). Пусть теперь $A = 1$. Получаем $1 + 0 = 1$. Согласно аксиоме (3) также получаем верный результат.

Рассмотрим ещё одну теорему: $A + A = A$. Пусть $A = 0$, тогда $0 + 0 = 0$. Согласно аксиоме (1) это верный результат. Если $A = 1$, то $1 + 1 = 1$. Это также верное равенство согласно аксиоме (4).

Кроме перечисленных девяти теорем, можно рассматривать и другие теоремы одной переменной. Все они могут быть доказаны с применением как аксиом, так и теорем (11)—(19). Например, докажем, что

$$A \cdot 1 \cdot A + A \cdot \overline{A} + A = A \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{0} \cdot A \cdot A. \qquad (20)$$

Преобразуем левую часть. Заметим, что по теореме (18), которую будем считать доказанной,

$$A \cdot \overline{A} = 0,$$

следовательно:

$$A \cdot 1 \cdot A + A \cdot \overline{A} + A = A \cdot 1 \cdot A + 0 + A.$$

По теореме (11) $0 + A = A$, следовательно,

$$A \cdot 1 \cdot A + 0 + A = A \cdot 1 \cdot A + A.$$

Согласно теореме (14) $A \cdot 1 = A$, тогда

$$A \cdot 1 \cdot A + A = A \cdot A + A.$$

По теореме (16) $A \cdot A = A$, следовательно,

$$A \cdot A + A = A + A.$$

Наконец, по теореме (15) имеем

$$A + A = A.$$

Преобразуем теперь правую часть. Согласно теореме (19) $\overline{\overline{A}} = A$, тогда

$$A \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{0} \cdot A \cdot A = A \cdot A + \overline{0} \cdot A \cdot A.$$

В соответствии с аксиомой (9) имеем $\overline{0} = 1$, следовательно:

$$A \cdot A + \overline{0} \cdot A \cdot A = A \cdot A + 1 \cdot A \cdot A.$$

По теореме (16) $A \cdot A = A$. Применяя её дважды, получаем

$$A \cdot A + 1 \cdot A \cdot A = A + 1 \cdot A.$$

По теореме (14) $1 \cdot A = A$, следовательно,

$$A + 1 \cdot A = A + A.$$

Наконец, применяя теорему (15), получаем окончательно

$$A + A = A.$$

Левая и правая части совпали, следовательно, выражение (20) является верным.

Упражнения

1. (РЭХ). С помощью аксиом найдите номера выражений, равных единице:

1) $0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot \overline{\overline{0}} + \overline{1} + \overline{\overline{1}} \cdot \overline{0}$;
2) $1 \cdot 1 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}} + 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 \cdot 0$;
3) $1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}} + \overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} + \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{1}$;
4) $0 \cdot 0 \cdot \overline{1} + 1 \cdot 1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}}$;
5) $0 \cdot 1 \cdot 1 + \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{1}$;
6) $1 \cdot 1 \cdot \overline{\overline{0}} + 0 \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 0 + \overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot \overline{1}$.

2. (ТРЮ). Найдите номера выражений, равных нулю:

1) $\overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 0 + 1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot 1$;
2) $1 \cdot 0 + \overline{0} \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot \overline{1}$;
3) $1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{1} + \overline{\overline{0}} \cdot \overline{1} + \overline{\overline{1}} \cdot \overline{\overline{0}}$;
4) $0 \cdot 1 \cdot 1 + \overline{0} \cdot \overline{1} \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot \overline{1} \cdot \overline{0}$;
5) $\overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 + \overline{1} \cdot \overline{0} \cdot \overline{1} \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} \cdot \overline{1}$;
6) $1 \cdot 1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{\overline{0}} + \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 1 + \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 1$.

3. (ХХФ). Найдите значение выражения:

$$A + A \cdot \overline{A} + 1 \cdot \overline{A} + 0 \cdot A \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{\overline{A}} \cdot 1 \cdot \overline{A}.$$

4. (2ДЯ). Найдите номера выражений, равных нулю:

1) $A \cdot \overline{A} \cdot A + 1 \cdot \overline{0} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{0} \cdot 1$;
2) $A \cdot \overline{A} \cdot 1 + A \cdot \overline{A} \cdot \overline{\overline{A}} + A \cdot \overline{1}$;
3) $1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{A} + \overline{0} \cdot \overline{A} \cdot 1 + A \cdot \overline{\overline{A}} \cdot \overline{0}$;
4) $0 + 1 \cdot 0 + A \cdot 0 + \overline{A} \cdot 0 + A \cdot \overline{A}$;
5) $A \cdot \overline{A} + \overline{\overline{A}} \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot \overline{1}$;
6) $\overline{0} \cdot A \cdot A \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot A \cdot 1 \cdot \overline{A} + \overline{1} \cdot A \cdot A$.

1.6. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы

Булевы формулы могут быть записаны в виде дизъюнкции либо в виде конъюнкции каких-либо выражений. В первом случае говорят о **дизъюнктивной** форме, во втором — о **конъюнктивной**. Например, выражения

$$AB + CDE;$$
$$A + B + CD;$$
$$A + B(C + D) + P;$$
$$A + B + T + K$$

представлены в дизъюнктивной форме, а выражения

$$(A + B)(C + D);$$
$$(AB + C)(E + F + K);$$
$$ABC(D + E)$$

— в конъюнктивной.

Если булева формула записана в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо конъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в **дизъюнктивной нормальной форме** (ДНФ). Например, выражения

$$AB + C\overline{D};$$
$$A + \overline{B} + CD\overline{E};$$
$$A + B + C + \overline{D}$$

представлены в ДНФ, а формула $A + B(C + \overline{D})$ к ДНФ не относится, так как второе слагаемое не является ни отдельным аргументом, ни конъюнкцией переменных.

Если булева формула записана в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо дизъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в **конъюнктивной нормальной форме** (КНФ). Например, выражения

$$(A + \overline{B})(C + \overline{A} + D);$$
$$AB(C + D + \overline{E})$$

записаны в КНФ, а формула $(A + \overline{B}C)(D + E)$ КНФ не является, поскольку первый сомножитель (в скобках) содержит конъюнкцию $\overline{B}C$.

Выражение, представленное отдельным аргументом или его инверсией, одновременно входит в класс ДНФ и КНФ.

Упражнения

1. Укажите номера формул, представленных в ДНФ.

(ХНМ).	(ТХС).	(ЕЙК).
1) $AB+C\overline{D}$;	1) $AB+A(B+C)$;	1) A;
2) $A+B+C$;	2) $AB+ABAA$;	2) AA;
3) $A+BC+\overline{E}$;	3) $B+C+B+CA$;	3) AB;
4) $P+Q(P+R)$;	4) $A+A(A+A)$;	4) $A+\overline{A}$;
5) $A+A$.	5) $AAA+A$.	5) $A+BC$.

2. Укажите номера формул, представленных в КНФ.

(ТТР).	(ЛСС).	(ЛКК).
1) $(AC+B)A$;	1) $(A+B)(A+B)$;	1) $A+B$;
2) $A(B+C)$;	2) A;	2) $A+\overline{B}+\overline{C}$;
3) $B(AB+AB)$;	3) $ABC(D+EF)$;	3) $(A+AA)A$;
4) ABC;	4) $ABC(D+D)$;	4) $(A+\overline{A})\overline{A}$;
5) $A+B$.	5) $ABC(D+\overline{D})$.	5) BB.

1.7. Теоремы поглощения, склеивания и де Моргана

Теорема поглощения записывается в двух формах — дизъюнктивной и конъюнктивной, соответственно:

$$A+AB=A; \tag{21}$$

$$A(A+B)=A. \tag{22}$$

Выражение (22) можно получить из (21), если знаки дизъюнкции и конъюнкции поменять местами. Докажем первую теорему. Вынесем за скобки букву A:

$$A+AB=A(1+B).$$

Согласно теореме (13) 1 + B = 1, следовательно

$$A(1+B)=A\cdot 1=A.$$

Чтобы доказать вторую теорему, сначала раскроем скобки:

$$A(A+B)=A\cdot A+AB=A+AB.$$

Получилось выражение, только что доказанное.

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы поглощения при упрощении булевых формул, содержащих более двух переменных.

$$ABC+BC=BC(A+1)=BC;$$

$$\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}D=\overline{A}B\overline{C}(1+D)=\overline{A}B\overline{C};$$

$$A+AB+ABC=A+AB(1+C)=$$
$$=A+AB=A;$$

$$A(A+B+CD)=A+AB+ACD=$$
$$=A(1+B+CD)=A;$$

$$B(A+B+CD)=AB+B+BCD=$$
$$=B(A+1+CD)=B.$$

Теорема склеивания также имеет две формы — дизъюнктивную и конъюнктивную:

$$AB+A\overline{B}=A; \tag{23}$$

$$(A+B)(A+\overline{B})=A. \tag{24}$$

Вторая теорема получается из первой, если в ней вместо знака конъюнкции поставить знак дизъюнкции, а дизъюнкцию заменить конъюнкцией.

Докажем первую теорему. Вынесем за скобки букву A:

$$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A\cdot 1=A,$$

поскольку согласно теоремам (17) и (14)

$$B+\overline{B}=1; \qquad A\cdot 1=A.$$

Для доказательства второй теоремы раскроем скобки:

$$(A+B)(A+\overline{B})=A+A\overline{B}+AB+B\overline{B}.$$

Согласно теореме (18) $B\overline{B}=0$, следовательно:

$$A+A\overline{B}+AB+B\overline{B}=A+A\overline{B}+AB.$$

По теореме поглощения

$$A+A\overline{B}+AB=A(1+\overline{B}+B)=A.$$

Теорема поглощения, как и теорема склеивания, применяется при упрощении булевых формул, например:

$$\overline{A}\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}(\overline{B}+B)=\overline{A};$$

$$A\overline{B}C+ABC=AC(\overline{B}+B)=AC;$$

$$(AB+C)(AB+\overline{C})=AB+AB\overline{C}+$$
$$+ABC+C\overline{C}=AB.$$

Теорема де Моргана связывает все три основные операции булевой алгебры — дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию:

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}; \tag{25}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}. \tag{26}$$

Первая теорема читается так: инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий. Вторая: инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий.

Теорема де Моргана применима и к большему числу переменных:

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C};$$

$$\overline{ABCD}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D};$$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$

$$\overline{A+B+C+D}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D};$$

$$\overline{A+\overline{B}+\overline{C}}=\overline{A}BC;$$

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}=A+B+C+D.$$

Упражнения

1. (153)! Примените теорему поглощения:

$\overline{A}+\overline{A}B$; $\qquad$ $K+KP$.

2. Упростите выражения:

(ФЕА). $PQ+SPQ+PQRST$;

(Н0Б). $XYZ+XZ+XZV$;

(ВМВ). $ABC\overline{D}+ABCD+\overline{A}BC$.

3. Упростите:

(РХГ). $(B+C)(B+\overline{C})$;

(ИМД). $(BC+\overline{D})(BC+D)$;

(ИЖЕ). $(B+C)(B+\overline{C})D$;

(БКФ). $V(X+YZ)(\overline{X}+YZ)$.

4. Найдите инверсию:

(УЮК). $\overline{\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$; $\qquad$ (ДЖЛ). $\overline{\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}$.

5. Упростите:

(ЕЖМ). $\overline{A+\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}+D}\cdot\overline{A}\cdot C$;

(ОНН). $\overline{P+Q}\cdot(P+Q)$;

(ЕЛО). $\overline{A+\overline{B}+C}\cdot(A+\overline{B}+C)+D$;

(ПНП). $\overline{RST}\cdot(\overline{R}+\overline{S}+\overline{T})\cdot RST$;

(ФЭР). $\overline{\overline{P}+\overline{Q}}+PQRS$.

1.8. Инвертирование сложных выражений

Теорема де Моргана применима не только к отдельным конъюнкциям или дизъюнкциям, но и к более сложным выражениям. Мы будем рассматривать инвертирование выражений, представляющих собой дизъюнкцию конъюнкций (сумму произведений) или конъюнкцию дизъюнкций (произведение сумм).

Найдём инверсию выражения $AB + CD$, представленного в виде дизъюнкции конъюнкций.

Инвертирование будем считать законченным, если знаки отрицания стоят только над переменными. Введём обозначения:

$$AB = X; \quad CD = Y,$$

тогда

$$\overline{AB+CD} = \overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}. \tag{27}$$

Найдём $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ и подставим в выражение (27):

$$\overline{X} = \overline{AB} = \overline{A}+\overline{B};$$
$$\overline{Y} = \overline{CD} = \overline{C}+\overline{D};$$
$$\overline{AB+CD} = \overline{X}\,\overline{Y} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D}).$$

Рассмотрим другое выражение, представленное в виде конъюнкции дизъюнкций:

$$(A + B)(C + D).$$

Найдём его инверсию в виде

$$\overline{(A+B)(C+D)}.$$

Введём обозначения:

$$A+B = X; \quad C+D = Y,$$

тогда

$$\overline{(A+B)(C+D)} = \overline{XY} = \overline{X}+\overline{Y}. \tag{28}$$

Найдём $\overline{X}$ и $\overline{Y}$:

$$\overline{X} = \overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B};$$
$$\overline{Y} = \overline{C+D} = \overline{C}\,\overline{D}$$

и подставим их в выражение (28):

$$\overline{(A+B)(C+D)} = \overline{XY} = \overline{X}+\overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}\,\overline{D}.$$

При инвертировании сложных выражений можно пользоваться следующим правилом. Чтобы найти инверсию, необходимо знаки умножения заменить знаками сложения, а знаки сложения — знаками умножения и поставить инверсии над каждой переменной (независимо от того, есть над переменными знаки отрицания или нет):

$$\overline{AB+\overline{B}C+\overline{D}E} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{\overline{B}}+\overline{C})(\overline{\overline{D}}+\overline{E}) =$$
$$= (\overline{A}+\overline{B})(B+\overline{C})(D+\overline{E});$$
$$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(D+\overline{E})P} = \overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}+\overline{D}\,\overline{\overline{E}}+\overline{P} = \overline{A}BC+\overline{D}E+\overline{P}.$$

Упражнения

1. (ОВР). Дано выражение

$$AB+C\overline{D}+\overline{E}.$$

Укажите номера формул, являющихся инверсией заданному выражению:

1) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)E$;
2) $(\overline{A}+\overline{B})E(\overline{C}+D)$;
3) $E(\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B})$;
4) $(A+B)(C+\overline{D})E$;
5) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}$;
6) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+E$.

2. (Б5Ж). Найдите номера верных формул:

1) $\overline{A(\overline{B}+C)} = \overline{A}+B\overline{C}$;
2) $\overline{ABC(\overline{D}+\overline{E})} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+DE$;
3) $\overline{ABC(P+K)L} = A+B+C+PK+L$;
4) $\overline{\overline{(A+\overline{B})(C+\overline{D})}} = (A+\overline{B})(C+\overline{D})$;
5) $\overline{AB+C\overline{D}+E+F} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}+\overline{F}$;
6) $\overline{\overline{A\overline{B}+CD+\overline{E}}} = (\overline{A}+B)(\overline{C}+\overline{D})E$.

3. Найдите инверсию выражения и упростите:

(ВУТ). $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$;

(ФУУ). $(\overline{X}+\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})(T+\overline{X}+\overline{Y})$;

(ИДФ). $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$.

2. ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. Понятие булевой функции

В общем случае функция (лат. functio — исполнение, соответствие, отображение) — это некоторое правило (закон), согласно которому каждому элементу множества X, представляющего собой область значений независимого переменного x, ставится в соответствие определенный элемент множества F, под которым понимается область значений зависимого переменного f (см. подраздел 2.12 темы «Теория множеств» данного пособия). В случае булевых функций $X = F = \{0,1\}$. Правилом, при помощи которого задается функция, может служить любая булева формула, например:

$$f = A\overline{B}+C. \tag{29}$$

Символом f здесь обозначена **функция**, которая является, как и аргументы A, B, C, двоичной переменной. **Аргументы** — это независимые переменные, они могут принимать любые значения — либо 0, либо 1. Функция же f — зависимая переменная. Её значение полностью определяется значениями переменных и логическими связями между ними.

Главная особенность функции: чтобы определить её значение, в общем случае необходимо знать значения всех аргументов, от которых она зависит. Например, функция (29) зависит от трёх аргументов. Если принять $A = 1$, то получим

$$f = 1\cdot\overline{B}+C = \overline{B}+C,$$

т. е. получилось новое выражение, не равное ни нулю, ни единице. Пусть теперь $B = 1$. Тогда

$$f = \overline{1}+C = 0+C = C,$$

т. е. и в этом случае неизвестно, чему равна функция, нулю или единице.

Примем, наконец, $C = 0$, тогда получим $f = 0$. Таким образом, если $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, то $f = 0$.

В подразделе 1.4 было использовано понятие **набора значений переменных**. В дальнейшем оно будет часто применяться, поэтому рассмотрим его более подробно.

Если всем аргументам, от которых зависит функция, присвоены некоторые значения, то говорят о наборе значений аргументов, который можно называть просто **набором**. Набор значений аргументов — это последовательность нулей и единиц, например, 110, где первая цифра соответствует первому аргументу, вторая — второму и третья — третьему. Очевидно, что необходимо заранее договориться, что такое первый, второй или, допустим, пятый аргумент. Для этого удобно пользоваться алфавитным расположением букв. Например, если

$$f = XY + P\overline{Q},$$

то согласно алфавиту первым является аргумент P, вторым — Q, третьим — X, четвёртым — Y. Тогда по набору значений аргументов легко найти значение функции. Пусть, например, дан набор 1001, тогда

$$P = 1, Q = 0, X = 0, Y = 1; \quad f = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \overline{0} = 1,$$

т. е. на наборе 1001 заданная функция равна единице.

Ещё раз отметим, что набор значений аргументов — это совокупность нулей и единиц. Двоичные числа также являются наборами нулей и единиц. Отсюда возникает вопрос — нельзя ли наборы рассматривать как двоичные числа? Можно, и во многих случаях это очень удобно, особенно, если двоичное число перевести в десятичную систему. Например, если

$$A = 0, \; B = 1, \; C = 1, \; D = 0,$$

то набор примет вид 0110. Если его считать двоичным числом, то имеем:

$$0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 = 6,$$

т. е. заданный набор имеет номер 6 в десятичной системе.

Если по десятичному номеру требуется найти значения аргументов, то поступаем в обратной последовательности: сначала десятичное число переводим в двоичное, затем слева дописываем столько нулей, чтобы общее число разрядов равнялось числу аргументов, после чего находим значения аргументов. Пусть, например, требуется найти значения аргументов A, B, C, D, E, F по набору с номером 23. Переводим число 23 в двоичную систему методом деления на два:

$$\begin{array}{rr} 23 & 1 \\ 11 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

В результате получаем $23|_{10} = 10111|_2$. Это число пятизначное, а всего аргументов шесть, следовательно, слева необходимо записать один нуль: $23|_{10} = 010111|_2$. Отсюда находим: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 1$.

Сколько всего существует наборов, если известно число n аргументов? Очевидно, столько же, сколько существует n-разрядных двоичных чисел, т. е. 2^n. Чтобы доказать это, запишем самое большое n-значное число. Оно будет состоять сплошь из единиц. Если к нему арифметически прибавить единицу (чтобы учесть двоичное число, состоящее из n нулей), то все n единиц n-значного числа превратятся в нули, а слева от них добавится единица с весом 2^n. Например, если $n = 3$, то всего существует 8 трёхзначных двоичных чисел. Запишем число 7 в двоичной системе и прибавим к нему единицу: 111 + 001 = 1000. Получили число 1000, т. е. 8 в десятичной системе.

Если $n = 5$, то

$$\begin{array}{rcccccc} + & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Получилось число $2^5 = 32$ и т. д.

Упражнения

1. Найдите значения функций, если $A = 1$, $C = 0$:

(75К). $f = \overline{A} + BC + AC$; (33П). $f = A + B\overline{CD}$;

(БКС). $f = AC + AD$; (ЯНЯ). $f = BC + AC$.

2. Введите в устройство десятичные эквиваленты наборов, на которых функция равна единице:

(ЕХН). $f = \overline{A}BC + AB\overline{C}$; (НБС). $f = AB + AC$;

(Т50). $f = BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; (УНР). $f = \overline{A}C + B\overline{C}$;

(РТА). $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}C$; (ТВУ). $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

3. Булева функция зависит от шести аргументов. Найдите наборы значений аргументов, если десятичные номера их имеют вид:

(С5). 16; (РЖ). 22; (ЫН). 55;
(КЛ). 4; (АХ). 60.

4. (ЕМ). Укажите номера функций, принимающих единичное значение на наборе 12:

1) $f = A\overline{B} + B\overline{D} + \overline{A}C$;
2) $f = BD + AC + CD$;
3) $f = \overline{D} + \overline{A}C + \overline{B}D$;
4) $f = \overline{C} + BD + \overline{A}\,\overline{B}$;
5) $f = ABC + BD$;
6) $f = \overline{A}\,\overline{C} + AC + BD$.

5. (ТБС). Функция четырёх аргументов принимает единичное значение на наборах 0,1,…,12, а на остальных — нулевое. На каких наборах функция принимает нулевое значение? (Наборы представить в десятичной системе.)

6. (КАА). Функция четырёх аргументов на половине наборов принимает нулевое значение, а на остальных — единичное. Сколько существует наборов, на которых функция принимает нулевое значение?

7. (ФИ). Функция трёх аргументов принимает единичное значение на трёх наборах, в двоичных изображениях которых только одна единица. Найти десятичные номера наборов, на которых функция равна единице.

8. (БМТ). Дана функция $f = AB + \overline{A}C + BC + AD$. Упростите эту функцию при условии, что $A = 0$.

9. (ГШЛ). Найдите аналитическое выражение функции трёх аргументов X, Y, Z, если известно, что она принимает единичное значение только на одном наборе 6.

2.2. Как задать булеву функцию

Один способ задания булевой функции мы уже знаем. Это **аналитический**, т. е. в виде математического выражения с использованием букв и логических операций. Кроме него, существуют и другие способы, важнейшим из которых является **табличный**. В таблице перечисляются все возможные наборы значений аргументов и для каждого набора указывается значение функции. Такую таблицу называют **таблицей соответствия** (иногда её называют **таблицей истинности**). На примере функции

$$f = A\overline{B} + \overline{A}C + \overline{A}B\overline{C}$$

выясним, как построить для неё таблицу соответствия. Функция зависит от трёх аргументов A, B, C. Следовательно, в таблице предусматриваем три колонки для аргументов A, B, C и одну колонку для значений функции (табл. 2). Слева от колонки A полезно разместить ещё одну колонку. В ней будем записывать десятичные числа, которые соответствуют наборам, если их рассматривать как трёхразрядные двоичные номера. Эта десятичная колонка вводится для удобства работы с таблицей, поэтому, в принципе, ею можно пренебречь.

Таблица 2

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Заполняем таблицу. В строке с двоичным номером 000 записано:

$$A = B = C = 0.$$

Определим значение функции на этом наборе:

$$f = 0\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot 0+\overline{0}\cdot 0\cdot\overline{0} = 0.$$

Так как $f = 0$ на наборе 000, то в колонке f записываем нуль в строке с набором 000.

Следующий набор: 001, т. е.

$$A = B = 0, \quad C = 1.$$

Находим значение функции на этом наборе:

$$f = 0\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot 1+\overline{0}\cdot 0\cdot\overline{1} = 1.$$

На наборе 001 функция равна 1, следовательно, в колонке f в строке с двоичным номером 001 записываем единицу.

Аналогично вычисляем значения функций на всех остальных наборах и заполняем всю таблицу.

Упражнения

1. (КРВ)! Функцию $f = A\overline{B}+B\overline{C}$ представьте в виде таблицы соответствия. Сколько единиц содержится в колонке f ? Сколько нулей содержится в колонке f ?

2. (ПАГ). Функция $f = AB$ представлена в виде таблицы соответствия трёх аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в колонке f ?

3. (00Д). В таблице соответствия пяти аргументов колонка f содержит 19 единиц. Сколько нулей в колонке f ?

4. (0МЕ). В колонке f таблицы соответствия шести аргументов содержится 64 единицы. Сколько в этой колонке нулей?

5. (ТРЖ). В таблице соответствия семи аргументов колонка f содержит поровну единиц и нулей. Сколько в ней нулей?

6. (2ЮИ)! Дана таблица соответствия четырёх аргументов A, B, C, D. Сколько единиц содержится в колонке A? В колонке B? В колонке C? В колонке D?

7. (КБК). Дана таблица соответствия восьми аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в 197-й строке (включая колонку f), если значение функции при этом равно нулю?

2.3. Минтермы

Существуют булевы функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе значений аргументов. В таблице соответствия эта единица может быть в любой строке, следовательно, таких функций существует 2^n, т. е. столько, сколько строк в таблице. Каждая из этих функций состоит из одной конъюнкции n аргументов, инверсных или неинверсных, причём распределение инверсий находится в строгом соответствии с распределением нулей в двоичной записи того набора, на котором функция принимает единичное значение. Поясним это на примере. Пусть функция зависит от четырёх аргументов A, B, C, D и равна единице на наборе 0101, а на всех остальных наборах равна нулю. Представим её в аналитической форме. Для этого запишем аргументы (в алфавитном порядке), а под ними — цифры набора:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Буквы, под которыми находятся нули, инвертируем, в результате получаем искомое выражение

$$f = \overline{A}B\overline{C}D.$$

Если построить таблицу соответствия, то в колонке f будет записана только одна единица — в строке с номером 5. (Это десятичный номер набора 0101.)

Функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе получили специальное обозначение. Называют их минимальными термами, а коротко — **минтермами** (минтермы нередко называют конституентами единицы). У минтермов существует и определение: минтермом n переменных называется такая конъюнкция их, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме. Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма [44, с. 49—50]. Двоичный эквивалент номера минтерма — это набор, на котором минтерм принимает единичное значение. Например, если функция зависит от трёх аргументов A, B, C, то

$$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\; m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C,\; m_2 = \overline{A}B\overline{C},\; m_3 = \overline{A}BC, \text{ и т.д.}$$

Если функция зависит от четырёх аргументов, то минтермы с теми же индексами примут вид

$$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D},\; m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D,\; m_2 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D},\; m_3 = \overline{A}\,\overline{B}CD \text{ и т. д.}$$

Минтермы обладают свойством: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. Справедливость этого утверждения следует из того, что два таких минтерма могут отличаться только инверсиями аргументов, т. е. если минтермы не равны, то всегда найдётся переменная, которая в один минтерм входит в прямой форме (без инверсии), а в другой — с отрицанием, конъюнкция которых равна нулю. Например, если $n = 4$, то

$$m_{12}\cdot m_5 = AB\overline{C}\,\overline{D}\cdot\overline{A}B\overline{C}D = 0.$$

Все символы, входящие в это выражение, соединены знаками конъюнкции. Сгруппируем буквы по парам:

$$m_{12}\cdot m_5 = A\cdot\overline{A}\cdot B\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot D = 0.$$

Так как в конъюнкцию входят буква и её отрицание, то вся конъюнкция принимает нулевое значение.

Если же минтермы равны между собой, то их конъюнкция даёт тот же минтерм.

Упражнения

1. (КШУ). Запишите двоичный набор, на котором минтерм $\overline{A}BCD$ принимает единичное значение.

2. Запишите двоичные наборы, на которых минтермы принимают единичное значение:

(КХФ). $AB\overline{C}\,\overline{D}E$; (ЛТК). $P\overline{Q}R\overline{S}T\overline{U}$;

(УВЛ). $VX\overline{Y}Z$; (ЕСЕ). $A_1\overline{A}_2 A_3\overline{A}_4\overline{A}_5$;

(УЛМ). $\overline{B}C\overline{D}$; (ПШН). $\overline{X}_1 X_2$.

3. Даны наборы, на которых минтермы принимают единичное значение. Запишите алгебраические выражения минтермов, располагая буквы в алфавитном порядке и всякий раз начиная с буквы A:

(БЦА). 0011; (ЫЛБ). 1100; (ВШС). 00011;
(АУД). 111000; (ДАЕ). 11111; (ТАФ). 1111;
(ЕЫГ). 111; (ЖФИ). 000; (МХК). 01.

4. (БОС). Укажите номера, где записаны минтермы:

1) $AB\overline{C}$; 3) $A+B+C$; 5) $PQRS$; 7) $AK\overline{K}B$;

2) $ABA\overline{C}$; 4) $BC\overline{D}$; 6) $AC\overline{M}$; 8) $AB\overline{B}C$.

5. (АХТ). Укажите номера, где записаны минтермы:

1) AB; 3) SS; 5) $AB\cdot 1$; 7) $A_1 A_2 \overline{A}_3$;

2) $ABA\overline{C}$; 4) A; 6) $C\overline{C}$; 8) $X_1\overline{X}_2$.

6. Запишите в аналитической форме минтермы, если известно, что они зависят от аргументов A, B, C, D, E:

(ЦКУ). m_{10}; (НКФ). m_1; (ЛЭХ). m_0;
(КЛЦ). m_{20}; (ЕМЧ). m_{16}; (КАШ). m_{15};
(БЕЩ). m_{31}; (ЧАЭ). m_{30}.

7. Найдите десятичные индексы минтермов:

(ОХ1). $A\overline{B}\overline{C}D$; (НВ2). $B\overline{C}D$; (ЦМ3). $C\overline{D}$;
(ВТЧ). A; (КН5). $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; (ЛЭ7). $\overline{P}$;
(ЖТ8). Q; (ЙЙ6). $\overline{X}_1 X_2 X_3 \overline{X}_4$.

8. Чему равны конъюнкции минтермов:

(КИА). $AB\overline{C}\cdot A\overline{B}\overline{C}$; (ИЮД). $A\overline{B}\cdot A\overline{B}C$;
(ЦЦБ). $AB\cdot P\overline{Q}R$; (КОЕ). $\overline{B}C\cdot A\overline{B}C$;
(ИЛВ). $AB\cdot B\overline{C}D$; (ПИЖ). $AB\overline{C}\cdot AC\overline{D}$;
(ЛЫГ). $PQR\cdot\overline{R}ST$; (ПМЗ). $X\overline{Y}Z\cdot Y\overline{Z}X$?

9. (ПД1). Сколько существует минтермов пяти аргументов?

10. (Т52). Сколько существует минтермов семи аргументов?

11. (НУЗ). Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с единицы?

12. (304). Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с нуля (это соответствует минтермам, начинающимся с инверсной буквы)?

13. (325). Сколько существует минтермов семи аргументов, двоичные индексы которых начинаются с двух нулей?

14. (ЮЮ6). Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых оканчиваются двумя единицами?

15. (597). Сколько инверсных аргументов содержит минтерм m_0, зависящий от аргументов A, B, C, D, E, F?

16. (А18). Сколько инверсных аргументов содержит минтерм m_3 и сколько — минтерм m_5, если оба они зависят от семи аргументов?

17. (879). Сколько прямых (неинверсных) аргументов содержит каждый из минтермов m_5, m_7, m_{11}, если они зависят от аргументов A, B, C, D, E?

18. (Д00). Сколько существует минтермов, двоичные индексы которых содержат точно две единицы, если минтермы зависят от пяти аргументов?

19. (806). Сколько существует минтермов пяти аргументов, двоичные индексы которых содержат точно три единицы?

2.4. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Если таблица соответствия содержит только одну единицу в колонке f, то функция представляет собой минтерм. А что будет, если в колонке f окажется две единицы (в различных строках, разумеется)? Каждая единица представляет собой минтерм, следовательно, функцию образует их дизъюнкция. Такой случай приведён в табл. 3. В ней единицы расположены в строках 2 и 5, следовательно:

$$f = m_2 + m_5 = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C.$$

Аналогично рассуждая, придём к выводу о том, что в функцию могут входить три, четыре и так далее минтермов. И вообще, всякая совокупность единиц в колонке f даёт некоторую булеву функцию и её всегда можно записать в виде суммы минтермов.

Таблица 3

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Если функция представлена в виде дизъюнкции минтермов n аргументов, то говорят, что она записана в **совершенной дизъюнктивной нормальной форме**, сокращённо **СДНФ**.

Пусть дана функция, принимающая единичное значение на наборах 001, 010, 100, 101 и 110. Тогда её аналитическое представление в СДНФ примет вид

$$f = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}.$$

Её можно записать и через обозначения минтермов:

$$f = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6.$$

Букву m можно удалить и указывать только номера наборов, на которых функция равна единице:

$$f = (1, 2, 4, 5, 6).$$

Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. По этой причине СДНФ называют иногда **стандартной формой**, а также **канонической**.

Сколько существует булевых функций n аргументов? На этот вопрос легко ответить, если учесть, что две функции совпадают только в том единственном случае, когда они состоят из одних и тех же минтермов. Следовательно, всякому набору минтермов соответствует отдельная булева функция. Чтобы определить число всех наборов минтермов, запишем минтермы в ряд

$$m_0\ m_1\ m_2\ \ldots\ m_{2^n-1}$$

и каждому из них поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица обозначает, что относящийся к ней минтерм входит в функцию, а нуль говорит о том, что соответствующий минтерм в функцию не входит. Тогда каждое 2^n-разрядное двоичное число будет обозначать некоторую булеву функцию, а общее число N всех возможных функций

$$N = 2^{2^n},$$

т. е. общее количество функций равно числу всех 2^n-разрядных двоичных чисел. Например, существует 256 функций трёх аргументов, 65536 функций четырёх аргументов, 4294967296 функций пяти аргументов и т. д.

Упражнения

1. Сколько минтермов содержат функции, если они зависят от четырёх аргументов?

(ИКА). $f = AB + CD$. (ЛХГ). $f = A + \overline{B}CD$.
(МОБ). $f = A + \overline{B} + \overline{C} + D$. (ЖСД). $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$.
(ЛВВ). $f = P + QRS$. (ХХЕ). $f = VXYZ$.

2. Представить в аналитическом виде СДНФ функций, зависящих от трёх аргументов A, B, C:

(ЖУЖ). $f = AB$; (ВЮЗ). $f = A\overline{B}C$;
(ККИ). $f = A\overline{B} + AC$; (МВК). $f = A\overline{C}$;
(КПЛ). $f = BC + \overline{A}C$; (ГЭМ). $f = \overline{B}C + AC$.

3. (ДЕЙ). Укажите номера функций, представленных в СДНФ:

1) $f = A$; 4) $f = AB\overline{C} + AC\overline{D} + BC\overline{D}$;

2) $f = ABCD$; 5) $f = AB\overline{C} + A\overline{B}D + \overline{A}CD + \overline{B}C\overline{D}$;

3) $f = A\overline{B} + \overline{A}B$; 6) $f = XYZ + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$.

4. (Р92). Укажите номера функций, заданных в СДНФ:

1) $f = X$; 4) $f = \overline{X}$;

2) $f = A\cdot\overline{A} + B\cdot\overline{B}$; 5) $f = PQ + P + \overline{Q}$;

3) $f = A + \overline{A}$; 6) $f = X\,\overline{X}$.

5. (725). Укажите номера функций, заданных в СДНФ:

1) $f = X\overline{Y}\,\overline{Z}$; 4) $f = PQ$;

2) $f = X + \overline{Y} + \overline{Z}$; 5) $f = R$;

3) $f = (X + Y)(Z + Y)$; 6) $f = PQ + \overline{P}Q$.

6. Запишите в аналитической форме функции, зависящие от трёх аргументов *A*, *B*, *C*:

(ДЦР). $f = m_1 + m_3 + m_4$; (ММУ). $f = m_0 + m_1$;

(ГМС). $f = m_0 + m_7$; (ПУФ). $f = m_1 + m_2 + m_6$;

(ЕМТ). $f = m_7$; (НИХ). $f = m_5 + m_6 + m_7$.

7. Запишите десятичные номера минтермов, образующих функции четырёх аргументов (номера упорядочить по возрастанию):

(НЕИ). $f = m_0 + m_1 + m_4 + m_7 + m_{10}$;

(ТАК). $f = \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$;

(ЗНЛ). $f = ABC$;

(МТМ). $f = A\overline{B}$;

(НАН). $f = C$;

(УПО). $f = CD + \overline{C}\,\overline{D}$.

2.5. Теорема разложения для ДНФ

Всякую булеву функцию можно представить в виде [23, с. 58]

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = A_1 f(1, A_2, \dots, A_n) + \overline{A}_1(0, A_2, \dots, A_n).$$

Доказать это утверждение очень легко. Пусть $A_1 = 1$. Тогда

$$f(1, A_2, \dots, A_n) = 1\cdot f(1, A_2, \dots, A_n) + \overline{1}\cdot f(0, A_2, \dots, A_n).$$

На основании аксиомы (10) и теорем (12), (14), (11) получаем очевидное тождество:

$$f(1, A_2, \dots, A_n) = f(1, A_2, \dots, A_n).$$

Если принять $A_1 = 0$, то также получим тождество, но вместо единиц будут записаны нули.

Например, разложим по аргументу *A* функцию

$$f = A\overline{B} + \overline{B}CD:$$

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = A\cdot(1\cdot\overline{B} + \overline{B}CD) + \overline{A}\cdot(0\cdot\overline{B} + \overline{B}CD) =$$
$$= A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}CD.$$

Разложить функцию можно по любому аргументу, например, по *B*:

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = B(A\cdot\overline{1} + \overline{1}CD) + \overline{B}(A\cdot\overline{0} + \overline{0}CD) =$$
$$= \overline{B}(A + CD).$$

Повторное разложение по одному и тому же аргументу вид функции не меняет. Разложим, например, последнее выражение снова по аргументу *B*. Тогда получим:

$$\overline{B}(A + CD) = B[\overline{1}(A + CD)] + \overline{B}[\overline{0}(A + CD)] = \overline{B}(A + CD).$$

Если функцию подвергнуть операции разложения последовательно (в любом порядке) по всем аргументам, то в результате получим СДНФ этой функции. Возьмём для примера функцию $f = A\overline{B} + C$ и разложим её по аргументам: сначала по *A*, затем по *B*, *C* и *D* (заметим при этом, что аргумент *D* в записи функции отсутствует):

а) разложив по *A*, получаем:

$$f = A\overline{B} + C = A(\overline{B} + C) + \overline{A}(C) = A\overline{B} + AC + \overline{A}C;$$

б) полученный результат разложим по *B*:

$$f = A\overline{B} + AC + \overline{A}C = B(AC + \overline{A}C) + \overline{B}(A + AC + \overline{A}C) =$$
$$= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}C;$$

в) полученное выражение разложим по *C*:

$$f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,C = C(AB + \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}) +$$
$$+ \overline{C}(A\overline{B}) = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C};$$

г) осталось разложить по аргументу *D*:

$$f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} = D(ABC +$$
$$+ \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\overline{B}\,\overline{C}) + \overline{D}(ABC + \overline{A}BC +$$
$$+ A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}) = ABCD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD +$$
$$+ \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + ABC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} +$$
$$+ \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = (15, 7, 11, 3, 9, 14, 6, 10, 2, 8).$$

Очевидно, что разложение функции можно продолжить, вводя всё новые и новые аргументы, и всякий раз будут получаться СДНФ, не совпадающие с другими.

В предыдущем подразделе сказано, что всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. Это утверждение справедливо только в том случае, если исходная функция и её СДНФ зависят от одних и тех же аргументов. В общем же случае, если заданная функция содержит *k* аргументов, то с помощью теоремы разложения её можно представить в СДНФ любого, большего *k*, числа аргументов, т. е. всякая булева функция представима в СДНФ неоднозначно, если нет ограничений на число аргументов.

Теорему разложения можно использовать при доказательстве других теорем. Например, докажем, что

$$A + \overline{A}B = A + B.$$

Это далеко не очевидное тождество. Чтобы доказать его справедливость, достаточно правую часть разложить по аргументу *A*:

$$A + B = A(1 + B) + \overline{A}(0 + B) = A + \overline{A}B.$$

Точно так же можно доказать, что

$$\overline{A} + AB = \overline{A} + B.$$

Теорема разложения применима и в тех случаях, когда функцию требуется представить в виде

$$f = \varphi_1 + \varphi_2,$$

при условии, что $\varphi_1\cdot\varphi_2 = 0$, т. е. функции φ_1 и φ_2 являются ортогональными [14, с. 71]. Такое представление возможно для всякой функции, достаточно применить к ней теорему разложения. Найдём φ_1 и φ_2, например, для функции

$$f = A\overline{B} + AC.$$

Разложим её по аргументу *B*:

$$f = B(A\cdot\overline{1} + AC) + \overline{B}(A\cdot\overline{0} + AC) = ABC + A\overline{B}.$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_1 = ABC;$$
$$\varphi_2 = A\overline{B};$$
$$\varphi_1\varphi_2 = ABC\cdot A\overline{B} = 0.$$

Упражнения

1. Разложите функции по аргументу A. Результаты вводите в устройство в аналитической форме (минтермы упорядочить по возрастанию их индексов):

(461). $f = AB$; (РОЮ). $f = B$;
(МТ2). $f = \overline{A}B$; (ТАО). $f = BC$.

2. Сколько минтермов содержит СДНФ булевой функции вида $f = A$, если её разложить по аргументам:

(С35) A?
(Т56) A и B?
(717) A, B, C, D?
(РТ8) A, B, C, D, E, F, K?

3. Сколько минтермов содержит функция $f = AC + D$, если её разложить по аргументам:

(839) A, C, D?
(Д00) A, B, C, D?
(И5С) A, B, C, D, E, F?
(ХБТ) A, B, C, D, E, F, K, L?

4. Сколько минтермов содержит СДНФ функции $f = 1$, если её разложить по аргументам:

(ВИА) A?
(ИРИ) A и B?
(200) A, B, C, D?
(ТЛЯ) A, B, C, D, E, F?

2.6. Карта Вейча

Карта Вейча (её модификацию называют **диаграммой Карно**) — это замечательное изобретение, позволяющее легко осуществлять различные преобразования булевых функций до пяти-шести аргументов.

Сначала рассмотрим карту двух аргументов (рис. 1). Левая половина карты обозначена буквой A, правая — той же буквой, но с инверсией. По горизонтали карта также разделена на две части. Верхняя половина обозначена буквой B, нижняя — буквой $\overline{B}$.

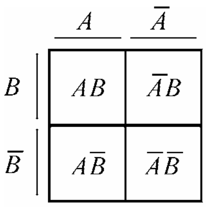


Рис. 1

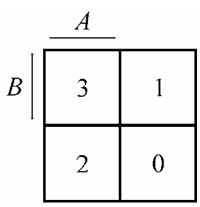


Рис. 2

Левая верхняя клетка находится на пересечении двух областей A и B. В связи с этим записываем в неё минтерм AB. Правая верхняя клетка находится на пересечении областей $\overline{A}$ и B. Записываем в эту клетку минтерм $\overline{A}B$. Аналогично записываем $A\overline{B}$ и $\overline{A}\,\overline{B}$ в оставшиеся две клетки. На рис. 2 приведена та же карта, но в клетках её указаны десятичные номера минтермов.

Рассмотрим карту Вейча трёх аргументов (рис. 3). В ней также для каждого минтерма отведена одна клетка, и, как и в случае карты двух аргументов, алгебраическая запись минтермов строго соответствует системе расположения букв вокруг карты. На рис. 4 изображена та же карта, но в клетках указаны номера минтермов. Кроме того, на ней указаны только неинверсные аргументы, например, вся левая часть карты обозначена буквой A, а правая половина никак не обозначена. Это значит, что буква $\overline{A}$ не пишется, но подразумевается.

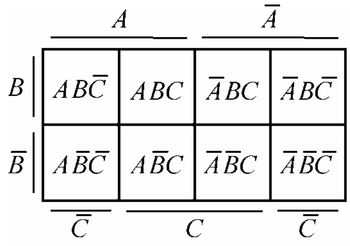


Рис. 3

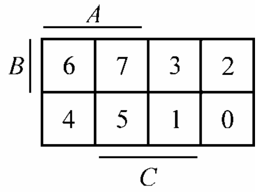


Рис. 4

На рис. 5 приведена карта четырёх аргументов, где в клетках указаны минтермы в их аналитической записи. Вокруг карты размещены переменные, для каждой из которых строго закреплена своя зона. Оставшаяся зона по каждой стороне карты закреплена за инверсной переменной. В дальнейшем для всех карт будем указывать область только неинверсной буквы, полагая, что вторая половина карты обозначается буквой с инверсией.

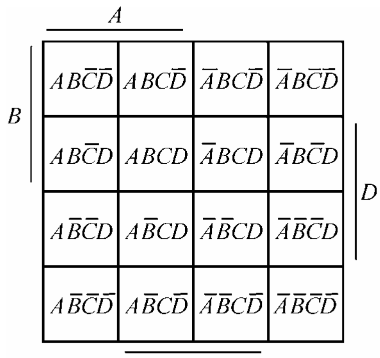


Рис. 5

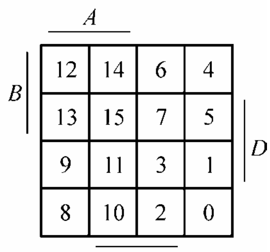


Рис. 6

На рис. 6 приведена карта, где размещены десятичные номера минтермов четырёх аргументов.

На рис. 7 изображена карта пяти аргументов. Она получена из двух карт четырёх аргументов. Левая карта обозначена буквой E, а правая соответственно буквой $\overline{E}$ (это подразумевается). В клетках карты размещены номера минтермов пяти аргументов.

Рис. 7

Аналогичным образом можно построить карту Вейча на любое число аргументов, однако практически дело ограничивается картами пяти, реже шести и совсем редко семи и восьми аргументов, так как с увеличением числа аргументов быстро возрастает сложность карты и соответственно снижается эффективность её использования.

Упражнения

1. Какой номер клетки занимает на карте Вейча минтерм:

(И0Б). ABC? (Д0В). $AB\overline{C}D$? (ГХГ). $\overline{A}B$?
(0СД). $A\overline{B}\,\overline{C}D$? (20Е). $A\overline{B}\,\overline{C}DE$? (ЦВЖ). $\overline{A}BC\overline{D}\,\overline{E}F$?

2. (ЕЮК). Сколько клеток имеет карта Вейча пяти аргументов?

3. (УЦЛ). Сколько клеток имеет карта Вейча *n* аргументов?

4. Запишите аналитическое выражение минтерма (через буквы *A*, *B*, *C*, *D*), находящегося в клетке карты Вейча с номером:

(ЕС1). 4;	(ДР2). 12;	(ТП3). 14;
(НП4). 0;	(Т65). 15;	(ЕК6). 10;

2.7. Нанесение функций на карту Вейча

Если функция представлена в виде суммы минтермов, т. е. в стандартной форме, то нанесение её на карту сводится к отысканию клеток, за которыми закреплены номера соответствующих минтермов. В найденные клетки записываются единицы. Поясним это на примере функции трёх аргументов, представленной в СДНФ:

$$f = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC.$$

Переведём минтермы в их номера:

$$f = (2, 3, 4, 7). \qquad (30)$$

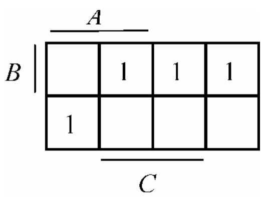


Рис. 8

Воспользуемся картой, приведённой на рис. 4. В её клетках записаны числа. Однако их можно не писать, поскольку система расположения букв вокруг карты точно определяет место каждого минтерма. Удалим с карты номера, тогда она станет пустой. Нанесём на неё функцию (рис. 8).

Единицы на карте обозначают номера минтермов, взятых из выражения (30). Самая правая единица (верхний ряд) занимает клетку с номером 2. Это постоянное место минтерма $m_2 = \overline{A}B\overline{C}$. Поскольку он входит в заданную функцию, то в этой клетке и поставлена единица. То же самое относится и ко всем остальным единицам карты. Пустые клетки обозначают, что соответствующие минтермы не входят в функцию.

Одно из достоинств карты Вейча состоит в том, что на неё нетрудно нанести функцию, представленную не только в СДНФ, но и в виде дизъюнкции конъюнкций, не являющейся СДНФ. Процесс её нанесения продемонстрируем на примере следующей функции:

$$f = AB + \overline{A}C + A\overline{B}C.$$

Эта функция зависит от трёх аргументов. Соответствующая карта Вейча приведена на рис. 9. Первая конъюнкция, входящая в функцию, равна *AB*. Находим на карте эту область. Она находится на пересечении зоны буквы *A* и зоны буквы *B*. Образуют её две клетки, расположенные в верхней строке в левой половине карты. В этих клетках ставим единицы (на рис. 9 они обведены).

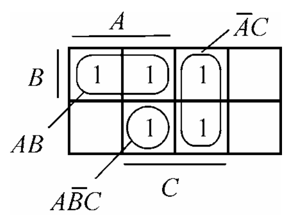


Рис. 9

Вторая конъюнкция имеет вид $\overline{A}C$. Находим область на карте, являющуюся общей для зон $\overline{A}$ и *C*. Это две клетки, расположенные вертикально. Они на рис. 9 также обведены. Наконец, наносим на карту конъюнкцию $A\overline{B}C$. Она на карте занимает единственную клетку на пересечении зон *A*, $\overline{B}$ и *C*. Заметим, что эта конъюнкция содержит все переменные, от которых зависит функция, т. е. она является минтермом $m_5 = A\overline{B}C$.

Мы рассмотрели случай, когда каждая конъюнкция, наносимая на карту, занимает новые области, не пересекающиеся с другими. Рассмотрим другой пример. Нанесём на карту функцию

$$f = A + BC.$$

Первая конъюнкция состоит из одной буквы. Конечно, это не конъюнкция, но для общности и одиночную переменную, входящую в функцию, удобно называть конъюнкцией. Нанесём эту одиночную переменную на карту (рис. 10). Ей соответствует зона *A*, следовательно, всю её заполняем единицами.

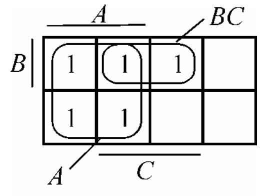


Рис. 10

Конъюнкция *BC* частью занимает новую клетку, а частью — уже занятую буквой *A*. Это значит, что на наборе значений аргументов 111 единице равна и «конъюнкция» *A* и конъюнкция *BC*. Функция при этом принимает единичное значение, так как $f = 1 + 1 \cdot 1 = 1$.

Следовательно, если в клетке уже стоит единица, то вторую единицу ставить нет необходимости.

Упражнения

1. Нанесите функцию на карту Вейча четырёх аргументов, записывая в клетках не более чем по одной единице. Определить число клеток, занятых единицами:

(МЮ1). $f = AB + C\overline{D}$;	(ХЫЧ). $f = AB + C + \overline{D}$;
(ЖУ2). $f = A + \overline{B} + C$;	(ХХ5). $f = A + \overline{D}$;
(НХ3). $f = ABCD + \overline{A}\,\overline{D}$;	(УЮ6). $f = A + C$.

2. Сколько пустых клеток на карте Вейча четырёх аргументов, если на неё нанести функцию:

(ОУФ). $f = AB$?	(ИИА). $f = A + \overline{B}C$?
(ЦВХ). $f = A + \overline{B} + \overline{C} + D$?	(ЖУО). $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D$?
(ЦОЦ). $f = A + \overline{B} + CD$?	(ЭЛЮ). $f = ABC + \overline{D}$?

3. (НШК)! Сколько клеток займёт функция $f = A\overline{B}$, если её нанести на карту трёх аргументов? Четырёх аргументов? Пяти аргументов? Шести аргументов?

4. (ЦРП)! Сколько клеток займёт функция $f = A\overline{B} + C$, если её нанести на карту трёх аргументов? Четырёх аргументов? Пяти аргументов? Шести аргументов?

5. (ПИБ). Некоторая функция на карте четырёх аргументов занимает 7 единиц. Сколько единиц займёт эта функция, если её нанести на карту шести аргументов?

2.8. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча

При помощи карты Вейча очень легко найти СДНФ функции, если она представлена в аналитической форме. Пусть дана функция

$$f = A + BC.$$

Чтобы найти ее СДНФ, воспользуемся картой Вейча (рис. 10). Если карту с нанесённой на неё функцией мысленно наложить на карту, где записаны номера минтермов (рис. 4), то единицы покажут номера минтермов, образующих данную функцию: $f = (3, 4, 5, 6, 7)$.

Рассмотрим ещё один пример:

$$f = A\overline{B} + BC\overline{D} + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D.$$

Нанесём функцию на карту Вейча (рис. 11). Затем обратимся к рис. 6, где изображена карта Вейча с номерами минтермов четырёх аргументов. Наложим эти карты одна на другую, тогда единицы покажут номера минтермов искомой СДНФ:

$$f = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14).$$

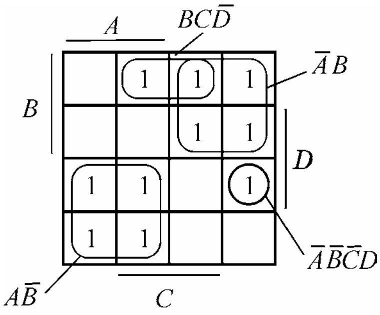


Рис. 11

В подразделе 2.4 сказано, что всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. Заметим, что здесь речь идёт о функции заданного числа аргументов. Если этой оговорки нет, то, как отмечено в подразделе 2.5, представление функции в СДНФ неоднозначно. Пусть требуется представить в СДНФ функцию $f = \overline{A}B + A\overline{B}$.

Можно считать, что она зависит от двух аргументов и её СДНФ имеет два минтерма $f = m_1 + m_2 = (1,2)$.

Но её можно нанести на карту трёх аргументов (рис. 12). Тогда её СДНФ примет вид $f = (2,3,4,5)$.

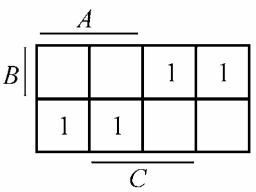


Рис. 12

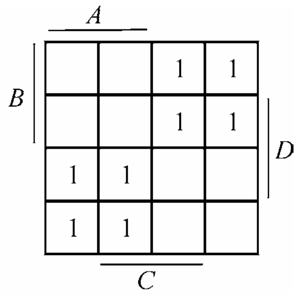


Рис. 13

Нанесём функцию на карту четырёх аргументов (рис. 13). Тогда получим

$$f = (4,5,6,7,8,9,10,11)$$

и т. д. без ограничений.

Рассмотрим ещё пример:

$$f = A\overline{B} + \overline{B}C + AC.$$

На карту двух аргументов эту функцию не нанести. Её можно нанести на карту трёх, четырёх и так далее аргументов:

$$f(A,B,C) = (1,4,5,7);$$

$$f(A,B,C,D) = (2,3,8,9,10,11,14,15).$$

С помощью карт Вейча легко выявить равенство двух функций. Две функции являются тождественно равными, если они состоят из одних и тех же минтермов, т. е. если их СДНФ совпадают. Например, функции

$$f_1 = AB\overline{D} + \overline{A}BC + \overline{B}CD + A\overline{C}D;$$

$$f_2 = AB\overline{C} + BC\overline{D} + \overline{A}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD$$

внешне не имеют ничего общего, но если их нанести на карту Вейча четырёх аргументов, то окажется, что их СДНФ совпадают и, следовательно, $f_1 = f_2$.

Карты Вейча позволяют находить СДНФ инверсий различных функций, их дизъюнкции и конъюнкции. Чтобы найти СДНФ инверсии заданной функции f, достаточно эту функцию нанести на карту Вейча. Номера минтермов, которым соответствуют пустые клетки на карте, дадут искомую СДНФ инверсии функции f. Например, пусть дана функция

$$f = A\overline{B} + \overline{C}D.$$

По карте Вейча нетрудно найти её СДНФ:

$$f = (1,5,8,9,10,11,13).$$

Если же выписать все минтермы, соответствующие пустым клеткам, то получим искомую СДНФ инверсии:

$$\overline{f} = (0,2,3,4,6,7,12,14,15).$$

Чтобы найти СДНФ конъюнкции двух функций, достаточно нанести на карту сначала первую функцию, затем — вторую, проставляя единицы, не обращая внимания на единицы первой функции. В некоторых клетках могут оказаться по две единицы. Это значит, что на соответствующих наборах обе функции принимают единичное значение. Выписав номера клеток с двумя единицами, мы получим СДНФ конъюнкции двух заданных функций.

Упражнения

1. (ГШЦ). Сколько минтермов содержит СДНФ функции $f = AB$, если она нанесена на карту восьми аргументов?

2. Сколько минтермов содержит СДНФ функции, если её нанести на карту шести аргументов:

(РШ1). $f = A + \overline{A}$; (ПШ0). $f = A \cdot \overline{A}$;

(АЙ2). $f = B + AC$; (НВЧ). $f = A\overline{B} + ABC$;

(ЕЧ3). $f = AB + AC + AD$; (К37). $f = A + B + D$.

3. Сколько пустых клеток на карте шести аргументов, если на неё нанести функцию:

(ВИА). $f = A + B + C + D + E$; (ШБЯ). $f = ABCDEF$;

(П50). $f = 1$; (ТЛП). $f = 0$;

(ЛБК). $f = X + Y + Z$; (ЛУТ). $f = A + B + \overline{C}$.

4. Сколько минтермов содержат функции пяти аргументов:

(НХП). $f = A + B + P + \overline{B}$; (ЫЫР). $f = AB + \overline{C}D$;

(Н00). $f = P + Q + R + \overline{P}$; (ГЖТ). $f = ABCDE$;

(ОЙМ). $f = A \cdot \overline{A} + X \cdot \overline{X}$; (УУК). $f = PQ + RST$.

5. Найдите номера минтермов функций (номера упорядочить по возрастанию):

(ИТА). $f(A,B,C) = A\overline{B}$;

(ВЭО). $f(P,Q,R,S) = PQ + R\overline{S}$;

(ЛВР). $f(P,Q,R) = P + \overline{P}Q$;

(БАМ). $f(A,B,C,D) = ABC + \overline{A}CD$;

(ГАВ). $f(X,Y,Z) = X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Z}$;

(ЕРК). $f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

6. Найдите СДНФ функций четырёх аргументов. Номера минтермов упорядочить по возрастанию:

(КН5). $f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

(ЖИЗ). $f = ABC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(ЛКД). $f = A \cdot \overline{A} + B \cdot \overline{B} + CD$;

(УЮ6). $f = CD + \overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{A}$;

(34). $f = P + Q + R + \overline{Q}$;

(Д89). $f = \overline{A}$.

7. (АГЧ). Укажите номера наборов значений аргументов A, B, C, D, на которых обе функции $f_1 = A\overline{B} + C$ и $f_2 = AC + BD$ принимают единичное значение.

8. (ЗА2). Укажите десятичные номера наборов, на которых равна единице конъюнкция функций

$$f_1 = BC + AD; \quad f_2 = AC + BD.$$

9. (203). Укажите номера наборов, на которых конъюнкция функций $f_1 = AB$; $f_2 = CD$ равна единице.

10. (ЛД6). Укажите номера функций, тождественно равных функции $f = \overline{A}C\overline{D} + AD + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}\,D$:

1) $f = AD + \overline{C}D + \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}C\overline{D}$;

2) $f = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{C}D + ACD$;

3) $f = \overline{A}C\overline{D} + AD + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

4) $f = AD + \overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$;

5) $f = \overline{C}D + \overline{A}C\overline{D} + ACD + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}$;

6) $f = \overline{A}C\overline{D} + AD + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{B}\,\overline{C}D + ABCD$.

11. (258). Укажите номера наборов, на которых $f_1 + f_2 = 1$, где $f_1 = ABC$; $f_2 = BCD$.

12. (МКО). Укажите номера наборов, на которых функция $\bar{f}$ равна единице, если $f = A + \overline{B} + CD$.

2.9. Алгебраическое упрощение булевых функций

В подразделе 1.7 уже упоминался термин «упрощение», но без раскрытия его содержания, так как для понимания простейших преобразований с применением теорем поглощения и склеивания интуитивного представления об упрощении было вполне достаточно. Теперь уточним это понятие. Но прежде всего отметим, что функция и формула — это не одно и то же. Если функция задана, то все преобразования могут относиться только к представляющей ее формуле. Сама же функция при этом остается неизменной. В связи с этим здесь и в дальнейшем под **упрощением** (**минимизацией**) булевой функции будем понимать такие тождественные преобразования ее формулы, которые приводят к предельному уменьшению числа вхождений аргументов. В результате преобразований получается **минимальная форма**.

Выясним, что понимается под **числом вхождений аргументов** и чем оно отличается от **числа аргументов.** Рассмотрим пример:

$$f = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}D.$$

Эта функция зависит от четырёх аргументов A, B, C, D, но имеет пять вхождений аргументов. Функция

$$f = A + \overline{A}B + BC + AC \tag{31}$$

зависит от трёх аргументов A, B, C, но имеет семь вхождений аргументов. Таким образом, число вхождений аргументов — это общее число букв, образующих функцию. При этом если некоторая буква встречается несколько раз, то и учитывается столько же раз.

Рассмотрим функцию (31). Нетрудно заметить, что её можно упростить:

$$f = A + \overline{A}B + BC + AC = A(1 + C) + \overline{A}B + BC = \\ = A + \overline{A}B + BC.$$

Слагаемое A поглощает конъюнкцию AC, следовательно, сумму $A + AC$ можно заменить буквой A. Тогда число вхождений аргументов уменьшается до пяти.

Чтобы продолжить упрощение, необходимо проявить некоторую изобретательность. Запишем пока так:

$$f = A + \overline{A}B + BC = A \cdot 1 + \overline{A}B + BC = \\ = A(B + \overline{B}) + \overline{A}B + BC = AB + A\overline{B} + \overline{A}B + BC = \\ = AB + A\overline{B} + \overline{A}B + AB + BC.$$

Как получили это выражение? Сначала аргумент A умножили на единицу, тождество от этого не нарушилось. Затем единицу заменили на $B + \overline{B}$ и аргумент A умножили на дизъюнкцию $B + \overline{B}$. После этого раскрыли скобки и добавили конъюнкцию AB. Теперь рассмотрим полученное выражение. Первая и вторая конъюнкции склеиваются, третья и четвёртая — тоже:

$$f = A(B + \overline{B}) + B(\overline{A} + A) + BC = A + B + BC.$$

В результате получилось четыре вхождения аргументов. Смотрим далее. К сумме $B + BC$ применима теорема поглощения:

$$B + BC = B(1 + C) = B.$$

Тогда получаем

$$f = A + B + BC = A + B(1 + C) = A + B.$$

Далее упростить это выражение невозможно. Заметим, что функция (31), которую мы упростили, зависела от трёх аргументов и имела семь вхождений букв, а получилась та же функция, но имеющая всего два аргумента. Это те аргументы, от которых функция действительно (существенно) зависит. Аргумент C является **фиктивным**. Функция от него зависит несущественно (т. е. вообще не зависит). Таким образом, алгебраическая минимизация булевых функций сводится к применению теорем одного аргумента, а также теорем склеивания и поглощения.

Рассмотрим ещё два примера.

Пример 1. Упростить функцию

$$f = AB\overline{C} + AC + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Сначала вынесем букву A за скобки и упростим скобочное выражение:

$$f = A(B\overline{C} + C) + BC + \overline{A}\,\overline{B} = A[B\overline{C} + C(B + \overline{B})] + BC + \\ + \overline{A}\,\overline{B} = A(B\overline{C} + BC + \overline{B}C + BC) + BC + \overline{A}\,\overline{B} = \\ = A[B(\overline{C} + C) + C(\overline{B} + B)] + BC + \overline{A}\,\overline{B} = A(B + C) + \\ + BC + \overline{A}\,\overline{B} = AB + AC + BC + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Заметим, что выражение в скобках упрощено точно таким же образом, как в предыдущем примере.

Теперь вынесем за скобки букву C:

$$f = AB + C(A + B) + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Выражение в скобках есть инверсия последней конъюнкции $\overline{A}\overline{B}$, т. е. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Обозначим: $Q = A + B$, $\overline{Q} = \overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$, тогда

$$f = AB + CQ + \overline{Q} = AB + CQ + \overline{Q}(C + \overline{C}) = \\ = AB + CQ + C\overline{Q} + \overline{C}\,\overline{Q}.$$

Добавим к этому выражению ещё одну конъюнкцию $C\overline{Q}$, (равенство не нарушится):

$$f = AB + CQ + C\overline{Q} + \overline{C}\,\overline{Q} + C\overline{Q} = \\ = AB + C(Q + \overline{Q}) + \overline{Q}(C + \overline{C}) = AB + C + \overline{Q}.$$

Подставим вместо $\overline{Q}$ его значение: $f = AB + C + \overline{A}\,\overline{B}$.

Это и есть минимальная форма заданной функции.

Пример 2. Упростить $f = A\overline{C} + BC + \overline{A}B$.

Действуем следующим образом:

$$f = A\overline{C} + BC(A + \overline{A}) + \overline{A}B = A\overline{C} + ABC + \overline{A}BC + \overline{A}B = \\ = A\overline{C} + ABC + \overline{A}B(C + 1) = A\overline{C} + ABC + \overline{A}B = \\ = A(\overline{C} + BC) + \overline{A}B = A[\overline{C}(B + \overline{B}) + BC] + \overline{A}B = \\ = A(B\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + BC + B\overline{C}) + \overline{A}B = A[\overline{C}(B + \overline{B}) + \\ + B(C + \overline{C})] + \overline{A}B = A(\overline{C} + B) + \overline{A}B = A\overline{C} + AB + \\ + \overline{A}B = A\overline{C} + B(A + \overline{A}) = A\overline{C} + B.$$

Упражнения

1. Определите число аргументов, от которых зависит функция, и число вхождений аргументов (функцию не преобразовывать):

(ПХ1). $f = A + BC$;

(ХД2). $f = A + A + A + \overline{A}$;

(ЕЧ3). $f = AB + A\overline{B} + A\overline{B} + A\overline{B}$;

(ЭУЧ). $f = \overline{A + B} + C + \overline{C} + C$;

(985). $f = A + \overline{A}B + \overline{B}C$;

(ОХ6). $f = A \cdot \overline{A} \cdot A \cdot \overline{A}$;

(ПВ7). $f = A + B + AB + AB$;

(УХ8). $f = \overline{\overline{A} \cdot A} \cdot \overline{A \cdot \overline{A}}$.

2. Найдите минимальную форму функций:

(ЕЧ1). $f = A\overline{C} + B + \overline{A}\,\overline{C}$;

(М09). $f = Y + X\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Z}$;

(ПК2). $f = P + \overline{P}Q$;

(Я00). $f = Q + P\overline{Q}$;

(П03). $f = P\overline{Q} + PQ + P\overline{Q}\,\overline{R}$;

(ЭЭ1). $f = (PQ + \overline{P}Q\overline{R})P$;

(УФЧ). $f = A + \overline{A}B + \overline{B}C$;

(ЕЛ2). $f = \overline{A} + AB + \overline{B}C$;

(ГЧ5). $f = A + \overline{A}\,\overline{B} + BC$;

(ТВ3). $f = X + \overline{X}Y + \overline{X}Z$;

(КК6). $f = P + \overline{P}Q + \overline{Q}R + \overline{R}S$;

(ДЧЧ). $f = (\overline{A}B + B\overline{C} + \overline{A}C)AB$;

(ВВ7). $f = (R + S)(\overline{R} + \overline{S})R\overline{S}T$;

(Л55). $f = (XY\overline{Z} + \overline{X}YZ)(X + \overline{Y})$;

(ИШ8). $f = (A + B + C)(\overline{A} + \overline{B})\overline{B}C$;

(ШР6). $f = (A + B + C)\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{P}Q$.

2.10. Понятие импликанты

Всякую функцию φ будем называть **импликантой** функции f, если все минтермы функции φ входят в множество минтермов функции f [4, с. 79; 16, с. 55].

Пусть дана функция $f = AB + BC$.

Представим её в СДНФ: $f = (3, 6, 7)$.

Эта функция содержит три минтерма. Из них можно образовать семь различных функций, каждая из которых является импликантой функции f:

$$\varphi_1 = m_3 = \overline{A}BC;$$

$$\varphi_2 = m_6 = AB\overline{C};$$

$$\varphi_3 = m_3 + m_6 = \overline{A}BC + AB\overline{C};$$

$$\varphi_4 = m_7 = ABC;$$

$$\varphi_5 = m_6 + m_7 = AB;$$

$$\varphi_6 = m_3 + m_7 = BC;$$

$$\varphi_7 = m_3 + m_6 + m_7 = AB + BC.$$

Известно, что кроме функций, содержащих непустое множество минтермов, существует функция φ = 0, у которой минтермов нет. Является ли она импликантой функции f? Определение понятия импликанты прямого ответа на данный вопрос не даёт, поэтому условимся считать, что функция φ = 0 является импликантой вообще всякой функции f. Следовательно, вышеприведённая функция имеет не семь, а восемь импликант.

В общем случае, если функция содержит n минтермов, то число её импликант равно 2^n.

Если функция представлена в СДНФ, то число её импликант определяется однозначно. Иное дело, если функция задана аналитически. Например, сколько импликант имеет функция $f = A$? Однозначного ответа на этот вопрос нет, поскольку не известно число минтермов, образующих эту функцию. Если функция зависит только от одного аргумента A, то в неё входит лишь один минтерм вида $m_1 = A$. Следовательно, всего существует две импликанты: $f = 0$ и сама функция $f = A$. Если же функция $f = A$ является результатом минимизации, например, выражения $AB + A\overline{B}$, то имеем два минтерма — $m_2 = A\overline{B}$ и $m_3 = AB$ и четыре импликанты:

$$\varphi_0 = 0; \quad \varphi_1 = AB; \quad \varphi_2 = A\overline{B}; \quad \varphi_3 = AB + A\overline{B} = A.$$

Таким образом, чтобы по аналитической записи функции определить число её импликант, необходимо знать число аргументов, так как в результате минимизации могут обнаружиться фиктивные аргументы.

Упражнения

1. Определите число импликант функций:

(825). $f(A, B, C, D) = AC$;	(УУФ). $f = (0, 1, 2, 3)$;
(982). $f = (10, 11, 12, 14, 15)$;	(176). $f(A, B, C, D) = 1$;
(МТ7). $f(A, B, C, D) = A + B$;	(323). $f = 0$;
(В54). $f = (1, 2, \ldots, 8)$;	(258). $f(A) = \overline{A}$.

2. Сколько минтермов входит в функцию, если число её импликант равно:

(КВА). 512;	(МАУ). 16;	(КШИ). 1;
(НЛО). 128;	(ХХЭ). 1024;	(ОДЕ). 256.

3. Сколько существует импликант, каждая из которых представляет собой функцию, содержащую точно два минтерма:

(858). $f = (1,3,5,7)$;

(НВК). $f(A,B,C,D) = B$;

(ХМП). $f = (4,9,15,20,21,30)$;

(ФИЛ). $f(A,B,C) = A + B + \overline{C}$;

(НАС). $f = (4,5,6,7,8,9,12,15)$;

(ББФ). $f(A,B,C,D) = \overline{A} + B$?

4. Укажите номера функций, которые являются импликантами функции $f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}B$, если функция f зависит от аргументов A, B, C.

(ТВК)!	(ХХР)!
1) $f = A$;	1) $f = A + \overline{A}B$;
2) $f = \overline{A}B$;	2) $f = \overline{A + \overline{B}}$;
3) $f = A(\overline{B} + \overline{C})$;	3) $f = \overline{\overline{B} + C}$;
4) $f = B$;	4) $f = AB + \overline{A} + \overline{B}$;
5) $f = 0$;	5) $f = A\overline{A} + B\overline{B}$;
6) $f = 1$.	6) $f = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$.

2.11. Метод Квайна

В подразделе 2.9 мы убедились, что алгебраическая минимизация требует очень большой изобретательности и с практической точки зрения интереса не представляет, за исключением простейших случаев. Многими специалистами предпринимались попытки разработать методы (алгоритмы), позволяющие найти минимальную форму и не требующие никакой изобретательности. Наиболее важным из них является **метод Квайна**. Проиллюстрируем его на примере функции четырёх аргументов вида:

$$f = (0,1,3,6,7,8,12,13,14,15).$$

Запишем минтермы в алгебраической форме:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD +$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD.$$

Суть метода Квайна весьма проста. Основу его составляет теорема склеивания, которая применяется к каждой паре минтермов заданной функции. Чтобы не пропустить ни одной пары, начнём с нулевого минтерма и поочерёдно сравним его со всеми остальными. Если сравниваемые минтермы отличаются инверсией только одного аргумента, то эти минтермы отмечаем, например подчёркиваем, а их общую часть запишем отдельно. В данном случае минтермы m_0 и m_1, а также m_0 и m_8 дают соответственно:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$
$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

Минтермы m_0, m_1 и m_8 подчёркиваем, при этом ранее подчёркнутый минтерм вторично можно не подчёркивать.

Берем минтерм m_1. Сравниваем его со всеми, кроме нулевого, в том числе и с подчёркнутыми. Получаем:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD = \overline{A}\,\overline{B}D.$$

Минтерм m_3 подчёркиваем. Аналогично сравниваем все остальные минтермы независимо от того, подчёркнуты они или нет, после чего заданная функция представится в виде дизъюнкции конъюнкций, полученных в результате склеивания минтермов.

На этом заканчивается первый этап минимизации по методу Квайна. Получилось выражение, все конъюнкции которого содержат не менее трёх аргументов:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC\overline{D} + \overline{A}BC +$$
$$+ BCD + A\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + ABC.$$

Переходим ко второму этапу. Конъюнкции полученного выражения точно так же сравниваем. Начинаем с левой конъюнкции $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Она не склеивается ни с одной конъюнкцией выражения. Поэтому её не подчёркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$. Она также не склеивается ни с одной конъюнкцией. То же самое относится и к конъюнкциям $\overline{A}\,\overline{B}D$ и $\overline{A}CD$. Все их не подчёркиваем и сравниваем конъюнкцию $BC\overline{D}$:

$$BC\overline{D} + BCD = BC.$$

Конъюнкции $BC\overline{D}$ и BCD подчёркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{A}BC$:

$$\overline{A}BC + ABC = BC.$$

Получилась та же самая конъюнкция. Поскольку она является повторной, то вторично её не записываем. Выполнив все операции сравнения, получим две неповторяющиеся конъюнкции BC и AB. Дизъюнкция этих двух и всех неподчёркнутых конъюнкций образует выражение, являющееся результатом действий второго этапа:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + AB + A\overline{C}\,\overline{D}.$$

Получили выражение, в котором нет ни одной пары склеивающихся конъюнкций. На этом метод Квайна заканчивается.

Выражение, полученное методом Квайна, называется **сокращённой дизъюнктивной нормальной формой** заданной функции, а каждая его конъюнкция называется **простой импликантой.**

Для всякой булевой функции существует единственная сокращённая ДНФ и единственная сокращенная КНФ.

Упражнения

1. Запишите функцию в СДНФ:

$$f = AB\overline{D} + A\overline{B}D + ABC + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

(РКА). Определите количество её минтермов и число вхождений аргументов.

(ЦУБ)! Выполните операции первого этапа метода Квайна, т. е. сравните все минтермы между собой. Найдите число минтермов, оставшихся неподчёркнутыми, и количество неповторяющихся конъюнкций, содержащих по три аргумента.

(ФЫВ)! Выполните операции второго этапа метода Квайна. Определит6 число неподчёркнутых конъюнкций трёх аргументов и число конъюнкций, содержащих по два аргумента.

(ЛЫГ)! Найдите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенной формы функции.

2. Определите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенных форм функций:

1) (ЕЖД)! $f = AB + AC + \overline{A}\,\overline{C} + BC$;

2) (ЕОЕ)! $f = (0,3,4,5,6,7)$ (три аргумента);

3) (ЭИЖ)! $f = (0,1,3,4,5,7)$ (три аргумента);

4) (АРО)! $f = (1,2,3,4,7)$ (три аргумента);

5) (ЖДИ)! $f = (2,3,6,7,10,11,14,15)$;

6) (ЕКК)! $f = (1,3,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$;

7) (ФУЛ)! $f = (1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$.

2.12. Нахождение простых импликант по карте Вейча

Если число аргументов функции не превышает 4, то простые импликанты можно найти по карте Вейча с гораздо меньшими затратами труда и времени, чем по методу Квайна. Для этого достаточно научиться находить на карте группы единиц, которым соответствуют простые импликанты. Правила их нахождения просты:

а) два минтерма склеиваются, если они являются соседними, т. е. расположенными рядом (но не на диагонали) либо на концах строки или столбца. На рис. 14 обведены склеивающиеся минтермы 11 и 15, 3 и 11; склеиваются также минтермы 4 и 12, 8 и 12;

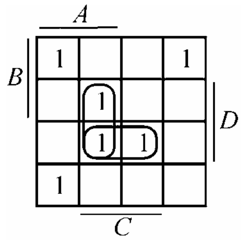


Рис. 14

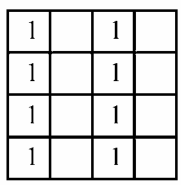


Рис. 15

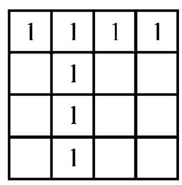


Рис. 16

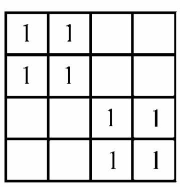


Рис. 17

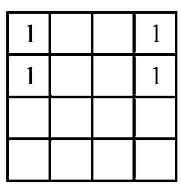


Рис. 18

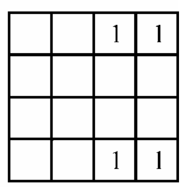


Рис. 19

б) четыре единицы на карте объединяются и образуют одну конъюнкцию, если они расположены в строку или столбец, а также квадратом. На рис. 15 слева единицы дают конъюнкцию $A\overline{C}$, остальные — $\overline{A}C$. На рис. 16 единицы, расположенные в строку, образуют конъюнкцию $B\overline{D}$, в колонку — AC. На рис. 17 единицы расположены квадратами: AB и $\overline{A}\,\overline{B}$. На рис. 18 единицы также образуют квадрат $B\overline{C}$, в чём можно убедиться, если карту свернуть в трубку так, чтобы её левая и правая стороны совпали. Аналогично на рис. 19 единицы дают квадрат $\overline{A}\,\overline{D}$, если карту свернуть в цилиндр вокруг горизонтальной оси. Если же карту свернуть в цилиндр вокруг горизонтальной и вертикальной осей одновременно, то придётся признать, что размещение четырёх единиц по углам карты также есть квадрат, образующий конъюнкцию $\overline{C}\,\overline{D}$ (рис. 20);

в) восемь единиц на карте объединяются, если все они расположены в зоне, относящейся к какой-либо букве или её инверсии. На рис. 21 восемь единиц объединяются, так как занимают всю зону буквы C, поэтому дизъюнкцию соответствующих восьми минтермов можно заменить буквой C. На рис. 22 единицами занята вся область буквы $\overline{D}$, на рис. 23 — $\overline{A}$.

1			1
1			1

Рис. 20

	1	1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	

Рис. 21

1	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 22

		1	1
		1	1
		1	1
		1	1

Рис. 23

Теперь можно переходить к отысканию простых импликант. Пусть задана функция:

$$f = (0,1,3,6,7,8,12,13,14,15).$$

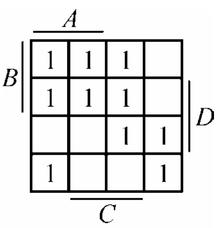


Рис. 24

Нанесём её на карту Вейча (рис. 24).

Начнём с нулевого минтерма. Он объединяется с минтермом m_1, поскольку единицы являются соседними. Получим первую простую импликанту $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Минтерм m_0 является соседним и по отношению к минтерму m_8, что даёт простую импликанту $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

Минтерм m_1 объединяется и с минтермом m_0, и с m_3. Получаем две простые импликанты $\overline{A}\,\overline{B}D$ и $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Импликанту $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ вторично не записываем. Новой является только простая импликанта $\overline{A}\,\overline{B}D$.

Переходим к минтерму m_3. У него также два варианта склеивания — с минтермами m_1 и m_7. Новой является импликанта $\overline{A}CD$.

Минтерм m_6 входит в группу единиц, расположенных квадратом. Поэтому простой импликантой будет конъюнкция BC, но такие импликанты, как $BC\overline{D}$ и $\overline{A}BC$ не являются простыми.

Седьмой минтерм имеет три соседние единицы. Однако новых простых импликант он не даёт, поскольку объединение его с минтермом m_3 есть простая импликанта $\overline{A}CD$, которая уже была записана ранее, а импликанты $\overline{A}BC$ и BCD не являются простыми, так как минтерм m_7 входит в квадрат единиц, также рассмотренный ранее.

Минтерм m_{12} входит в квадрат единиц, дающих конъюнкцию AB. Это новая простая импликанта. Кроме того, минтерм m_{12} является соседним по отношению к минтерму m_8, что даёт новую простую импликанту $A\overline{C}\,\overline{D}$. Минтерм m_{13} новых импликант не даёт. Минтерм m_{14} входит в два квадрата: AB и BC. Новых импликант нет. То же самое относится к минтерму m_{15}.

Таким образом, найдены все простые импликанты, дизъюнкция которых образует сокращённую дизъюнктивную нормальную форму:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + A\overline{C}\,\overline{D} + AB,$$

что находится в полном соответствии с методом Квайна.

Упражнения

1. Найдите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенных форм функций четырех переменных:

(ЦОО)! $f = (3,7,9,11,12,13,14,15)$;

(ЫЫП)! $f = (0,1,2,3,8,9,10,11)$;

(ЦВР)! $f = (0,1,2,3,8,9,10,11,14,15)$;

(ПХС)! $f = (0,1,2,3,4,5,8,9,10,11,14,15)$;

(ИЛТ)! $f = (1,3,7,9,11,12,13,15)$;

(ЕТУ)! $f = (3,6,7,9,11,12,13,14)$;

(СПХ)! $f = (0,2,10,12,14)$;

(ВВК)! $f = (1,3,5,7,10,11,12,13,15)$.

2. (ЕЙМ). Дано шесть конъюнкций:

1) AB;	3) AC;	5) AD;
2) BD;	4) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;	6) $A\overline{B}C$.

Укажите номера тех конъюнкций, которые являются простыми импликантами функции

$$f = (0,1,3,5,7,9,10,11,12,13,14,15).$$

3. Найдите сокращённую форму функции

$$f = (0,3,4,7,8,10,11,12,15).$$

(414)! Введите в устройство число вхождений неинверсных аргументов и число вхождений инверсных аргументов.

4. (909)! Найдите сокращённую форму функции

$$f = (1,3,5,12,15).$$

Введите в устройство число простых импликант, число вхождений неинверсных аргументов и число вхождений инверсных аргументов.

5. (ЖУ1). Даны две простые импликанты AB и C. Сколько минтермов содержит дизъюнкция этих простых импликант на карте четырёх переменных?

2.13. Метод Петрика

В подразделе 2.11 было сказано, что метод Квайна на этапе нахождения сокращённой формы заканчивается. Однако сокращённая форма функции очень часто не является минимальной. В вопросах нахождения минимальных форм порядок навёл Петрик, разработав свой метод нахождения всех возможных минимальных форм на основе сокращённых [11, с. 273; 14, с. 41—42]. Необходимо отметить, что принцип, заложенный в основу метода, используется не только в булевой алгебре, но и в комбинаторике, теории множеств, теории графов и др.

Метод Петрика поясним на примере следующей функции, представленной в сокращённой форме:

$$f=\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{D}+\overline{A}B+B\overline{D}+BC+ \\ +A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}D+ACD, \qquad (32)$$

СДНФ которой имеет вид

$$f=(0,2,4,5,6,7,8,9,11,12,14,15). \qquad (33)$$

Что значит — сокращённая форма не является минимальной? Это значит, что она содержит простые импликанты, которые являются лишними, т. е. если их удалить, то функция не изменится. Например, если из выражения (32) удалить простую импликанту $A\overline{B}\,\overline{C}$, то функция останется той же самой. Чтобы убедиться в этом, достаточно нанести функцию на карту Вейча (рис. 25), по которой видно, что СДНФ функции не изменилась. Однако если удалить импликанту $\overline{A}\,\overline{D}$, то функция изменится и примет вид, приведённый на рис. 26, откуда видно, что на наборе 0010 функция стала равной нулю, в то время как функция (33) на этом наборе равна единице. Иначе говоря, с удалением из выражения (32) простой импликанты $\overline{A}\,\overline{D}$ из функции оказался удалённым и минтерм m_2.

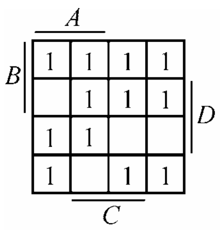


Рис. 25

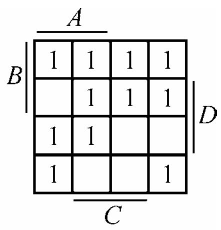


Рис. 26

Таким путём можно проверить каждую простую импликанту, т. е. поочерёдно удаляя их, всякий раз выясняем, изменится функция или нет. Все оставшиеся неизменными выражения можно снова проверить тем же путём и т. д. В результате будут получены все варианты **тупиковых форм**, т. е. таких выражений, из которых уже ни одной простой импликанты удалить не удаётся. Подобный метод хотя и возможен, но с практической точки зрения не пригоден, так как очень громоздок. Метод Петрика позволяет найти все тупиковые формы гораздо более коротким путём. Основу его составляет так называемая импликантная матрица (табл. 4), в которой строки озаглавлены простыми импликантами, а столбцы — минтермами.

Таблица 4

	0	2	4	5	6	7	8	9	11	12	14	15
$\overline{C}\,\overline{D}$	1		1				1			1		
$\overline{A}\,\overline{D}$	1	1	1		1							
$\overline{A}B$			1	1	1	1						
$B\overline{D}$			1		1					1	1	
BC					1	1					1	1
$A\overline{B}\,\overline{C}$							1	1				
$A\overline{B}D$								1	1			
ACD									1			1
	✓	✓	✓	✓	✓	✓						

Основное поле заполняем единицами по очень простому правилу: берём какую-либо строку и выясняем, из каких минтермов состоит её простая импликанта. Эти минтермы и отмечаем единицами. В первой строке записана простая импликанта $\overline{C}\,\overline{D}$. Она получена путём объединения минтермов 0, 4, 8, 12, в чём нетрудно убедиться, если её нанести на карту Вейча. Номера минтермов в таблице указаны. В колонках 0, 4, 8, 12 ставим единицы.

Переходим ко второй строке. В ней записана простая импликанта $\overline{A}\,\overline{D}$. Она получается путём объединения минтермов 0, 2, 4, 6. В колонках с номерами 0, 2, 4, 6 ставим единицы и так далее до последней простой импликанты в конце таблицы.

В колонках находится различное число единиц. Например, в колонке 2 записана одна единица, это значит, что минтерм m_2 останется в функции, если импликанта $\overline{A}\,\overline{D}$ не будет удалена. Следовательно, импликанту $\overline{A}\,\overline{D}$ удалять нельзя. Точно так же нельзя удалять и импликанту $\overline{A}B$. На этом основании импликантную матрицу можно упростить.

Поскольку простые импликанты $\overline{A}B$ и $\overline{A}\,\overline{D}$ являются обязательными для всех вариантов тупиковых форм, то их из матрицы можно удалить. Вместе с ними можно удалить и образующие их минтермы, так как в функции они уже содержатся за счёт импликант $\overline{A}B$ и $\overline{A}\,\overline{D}$. В табл. 4 эти минтермы отмечены птичками (под колонками).

После всех удалений получим упрощённую матрицу (табл. 5).

Таблица 5

		8	9	11	12	14	15
φ_1	$\overline{C}\,\overline{D}$	1			1		
φ_2	$B\overline{D}$				1	1	
φ_3	BC					1	1
φ_4	$A\overline{B}\,\overline{C}$	1	1				
φ_5	$A\overline{B}D$		1	1			
φ_6	ACD			1			1

Введём логические переменные $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_6$ (они записаны в дополнительной колонке в левой части табл. 5). Будем считать, что $\varphi_1=1$, если простая импликанта $\overline{C}\,\overline{D}$ входит в функцию, и $\varphi_1=0$, если не входит. Аналогично $\varphi_2=1$, если простая импликанта $B\overline{D}$ входит в функцию, и $\varphi_2=0$ в противоположном случае и т. д. Тогда если $\varphi_1+\varphi_4=1$, то минтерм m_8 входит в функцию; если $\varphi_4+\varphi_5=1$, то m_9 входит в функцию и т. д.

Условие, при котором все минтермы останутся в функции, запишется в виде

$$(\varphi_1+\varphi_4)(\varphi_4+\varphi_5)(\varphi_5+\varphi_6)(\varphi_1+\varphi_2)(\varphi_2+\varphi_3)(\varphi_3+\varphi_6)=1.$$

Раскроем скобки и выполним все операции согласно теореме поглощения. Для первых двух скобок имеем:

$$(\varphi_1+\varphi_4)(\varphi_4+\varphi_5)=\varphi_1\varphi_4+\varphi_1\varphi_5+\varphi_4+\varphi_4\varphi_5=\varphi_4+\varphi_1\varphi_5.$$

Третья и последняя скобки дают:

$$(\varphi_5+\varphi_6)(\varphi_3+\varphi_6)=\varphi_6+\varphi_3\varphi_5.$$

Четвёртая и пятая скобки аналогично:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(\varphi_2+\varphi_3)=\varphi_2+\varphi_1\varphi_3.$$

Тогда исходное уравнение представится в виде

$$(\varphi_4+\varphi_1\varphi_5)(\varphi_6+\varphi_3\varphi_5)(\varphi_2+\varphi_1\varphi_3)=1.$$

Закончив операции по раскрытию скобок, получим:

$$\varphi_2\varphi_4\varphi_6+\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5+\varphi_1\varphi_2\varphi_5\varphi_6+\varphi_1\varphi_3\varphi_4\varphi_6+\varphi_1\varphi_3\varphi_5=1.$$

Таким образом, мы нашли ответ на поставленную задачу, правда, пока этот ответ представлен в зашифрованном виде. Расшифруем его. Каждая конъюнкция в полученном уравнении может быть равной единице. Если $\varphi_2\varphi_4\varphi_6 = 1$, то это значит, что в функцию должны войти простые импликанты $B\overline{D}$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, ACD. Следовательно, получили первый вариант тупиковой формы:

$$f_1 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C} + ACD,$$

содержащей 12 вхождений аргументов.

Если $\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 = 1$, то в функцию должны войти простые импликанты $B\overline{D}$, BC, $A\overline{B}\,\overline{C}$, $A\overline{B}D$. Получим вторую тупиковую форму:

$$f_2 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}D.$$

Аналогично находим ещё три тупиковые формы:

$$f_3 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + B\overline{D} + A\overline{B}D + ACD;$$

$$f_4 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + BC + A\overline{B}\,\overline{C} + ACD;$$

$$f_5 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + BC + A\overline{B}D.$$

Таким образом, функция (32) имеет пять дизъюнктивных тупиковых нормальных форм, среди которых одна минимальная. В ней 11 вхождений аргументов.

Упражнения

Найдите все тупиковые формы функции. В устройство введите число тупиковых форм и число вхождений аргументов минимальной формы:

(ФЯВ). $f = (3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14)$;

(ППС). $f = (1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13)$;

(ЕС0). $f = (2, 3, 9, 10, 11, 12, 13)$;

(НТН). $f = (2, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14)$.

2.14. Минимизация булевых функций при помощи карт Вейча

Методы Квайна и Петрика, а также ряд других методов (Мак-Класски, Блейка-Порецкого, испытания остатков и др., которые не будем рассматривать) эффективны при минимизации достаточно сложных булевых функций с применением средств вычислительной техники. Если же ограничиться функциями четырёх аргументов, то всегда можно пользоваться только картами Вейча (за исключением особых случаев).

Минимизация при помощи карт Вейча сводится к нахождению простых импликант, но не всех возможных, а лишь тех, которые охватывают все единицы на карте.

Начинать минимизацию следует с единиц, входящих в единственную простую импликанту. Обратимся к карте, изображённой на рис. 27.

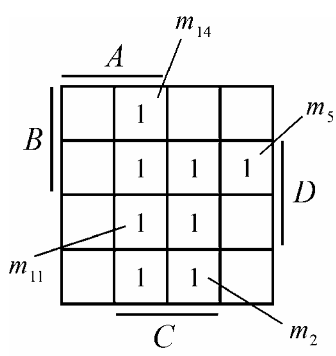


Рис. 27

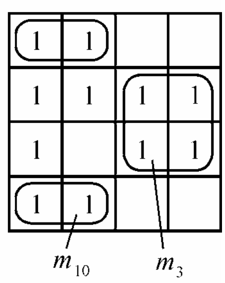


Рис. 28

На ней имеются только три единицы, с которых необходимо начать упрощение функции. Это минтерм m_2, входящий в единственную простую импликанту $\overline{B}C$, затем минтерм m_5, входящий в единственную простую импликанту $\overline{A}BD$, и минтерм m_{14}, входящий в простую импликанту AC. Начинать минимизацию с других единиц не следует, так как каждая из них входит более чем в одну простую импликанту.

Например, минтерм m_{11} входит в простые импликанты AC, CD, $\overline{B}C$. Если будет выбрана импликанта CD, то минимальную форму найти не удастся, поскольку в минимальной форме

$$f = \overline{B}C + \overline{A}BD + AC$$

импликанты CD нет. Заметим, что три конъюнкции, сумма которых даёт минимальную форму функции, это и есть те единственные простые импликанты для минтермов m_2, m_5 и m_{14}.

Рассмотрим ещё один пример (рис. 28). Здесь имеются только два минтерма, входящих в единственные простые импликанты. Это минтермы m_3 и m_{10}. Соответствующие им простые импликанты обведены. На карте остались три единицы. Объединить их можно двумя простыми импликантами:

$$f = A\overline{D} + \overline{A}D + \begin{cases} AB + A\overline{C}; \\ AB + \overline{C}D; \\ BD + A\overline{C}; \\ BD + \overline{C}D. \end{cases}$$

Таким образом, данная функция имеет 4 минимальные формы, каждая из которых содержит 8 вхождений букв.

На рис. 29—43 даны ещё 15 примеров. Буквы вокруг карты записывать не будем, полагая, что система их расположения такая же, как на рис. 26.

1	1		
1	1	1	1
1	1	1	
1	1		

$$f = A + BD + CD$$

Рис. 29

1	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	

$$f = AB + C + D$$

Рис. 30

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

$$f = \overline{B} + D$$

Рис. 31

1		1	1
1		1	1
1		1	1
1		1	1

$$f = \overline{A} + \overline{C}$$

Рис. 32

	1	1	
1	1	1	
1	1		
	1	1	

$$f = C\overline{D} + AD + BC$$

Рис. 33

	1	1	
		1	1
		1	1
	1	1	

$$f = C\overline{D} + \overline{A}D$$

Рис. 34

1	1		
	1	1	
1	1		
	1	1	

$$f = AB\overline{D} + BCD + A\overline{B}D + \overline{B}C\overline{D}$$

Рис. 35

1	1		1
	1		
1			1

$$f = \overline{C}\,\overline{D} + ABC$$

Рис. 36

1			1
1		1	1
1	1	1	1
1			1

$$f = \overline{C} + \overline{B}D + \overline{A}D$$

Рис. 37

			1
1	1	1	1
			1
	1		1

$f = BD + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}C\overline{D}$

Рис. 38

1	1	1	1
	1		
1	1	1	1

$f = \overline{D} + A\overline{B}C$

Рис. 39

	1		
1			
		1	1

$f = \overline{A}\,\overline{B}D + ABC\overline{D} + AB\overline{C}D$

Рис. 40

1	1	1	

$f = A\overline{B}D + \overline{B}CD$

Рис. 41

1		1	
1	1	1	1
1		1	
1	1	1	1

$f = A\overline{C} + \overline{A}C + BD + \overline{B}\,\overline{D}$

Рис. 42

	1	1	
1	1	1	1

$f = \overline{B}D + BC\overline{D}$

Рис. 43

Упражнения

Минимизируйте функции. Найдите число их простых импликант и число вхождений аргументов:

1) (985). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15)$;
2) (ВЛО). $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14)$;
3) (905). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$;
4) (ГПЗ). $f = (4, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15)$;
5) (МТМ). $f = (6, 8, 9, 10, 15)$;
6) (СКК). $f = (2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15)$;
7) (365). $f = (0, 1, 3, 7, 9, 10, 11, 13)$;
8) (926). $f = (0, 1, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$;
9) (ЦК5). $f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14)$;
10) (ЕД2). $f = (2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13)$;
11) (ПДЛ). $f = (0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13)$;
12) (32М). $f = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 13)$;
13) (432). $f = (0, 1, 7, 10, 13, 14)$;
14) (38Ф). $f = (1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 14)$;
15) (ФУ1). $f = (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 15)$;
16) (ЭМИ). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 15)$;
17) (ПС9). $f = (0, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$;
18) (343). $f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 13)$;
19) (СЛЮ). $f = (0, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14)$.

3. КОНЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Основной способ нахождения КНФ

Всякая булева функция может быть представлена не только в ДНФ, но и в КНФ. Например:

$$AB + BC = B(A + C).$$

Слева записано выражение в ДНФ. Если аргумент B вынести за скобки, то получим КНФ (выражение справа). Такой простой способ нахождения КНФ, основанный на вынесении букв за скобки, применим лишь для некоторых функций. В подавляющем же большинстве случаев он бесполезен. Например, в выражении $AB + \overline{B}CD$ вообще нет букв, которые можно было бы вынести за скобки, а по её КНФ не видно никакой связи с ДНФ:

$$AB + \overline{B}CD = (B + C)(B + D)(A + \overline{B}).$$

Конъюнктивная форма, как и дизъюнктивная, может быть совершенной, сокращённой, тупиковой и минимальной. В [44, с. 96] описан универсальный приём, позволяющий на основе ДНФ найти любую КНФ. Суть его состоит в двойном инвертировании заданной функции. Первое инвертирование осуществляется на уровне минтермов, в результате чего получается инверсия исходного выражения, состоящая из минтермов, отсутствующих в заданной функции. Инверсная СДНФ затем подвергается тем или иным преобразованиям и результат инвертируется по теореме де Моргана. Получим конъюнктивную нормальную форму заданной функции.

Этим приёмом мы будем пользоваться в дальнейшем как основным.

3.2. Макстермы

Изучение конъюнктивных форм начнём с понятия макстерма (максимального терма). **Макстерм** (его называют также конституентой нуля) — это булева функция, которая, в отличие от минтерма, принимает единичное значение на всех наборах, за исключением одного. На этом единственном наборе макстерм принимает нулевое значение. В таблице соответствия для таких функций колонка f содержит точно один нуль и $2^n - 1$ единиц, где n — число аргументов, от которых зависит макстерм.

Макстермы условимся обозначать большой буквой M с десятичными индексами по аналогии с обозначением минтермов.

Нетрудно заметить, что макстерм — это инверсия минтерма, и наоборот: минтерм — это инверсия макстерма (но с несовпадающими индексами). Воспользуемся этим обстоятельством и найдём аналитическое выражение макстерма. Пусть функция зависит от аргументов A, B, C, и пусть в таблице соответствия в строке 5 колонки f записан нуль, а во всех остальных строках — единицы (табл. 6). Добавим справа ещё одну колонку и запишем в неё ту же функцию f, но в инверсной форме. Тогда $\overline{f} = m_5 = A\overline{B}C$, откуда получаем:

Таблица 6

№	A	B	C	f	$\overline{f}$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

$$\overline{\overline{f}} = f = \overline{m}_5 = \overline{A\overline{B}C} = \overline{A} + B + \overline{C}.$$

Эта функция и есть макстерм M_2, т. е. $M_2 = \overline{A} + B + \overline{C}$. В каком случае он равен нулю? Очевидно, в том, когда все его слагаемые равны нулю: $\overline{A} = 0$, $B = 0$, $\overline{C} = 0$. Отсюда следует, что $M_2 = 0$, если $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, т. е. $M_2 = 0$ на наборе 101.

Индекс макстерма определяется точно так же, как и в случае минтерма.

Макстерм имеет своё определение: макстермом n переменных называется такая дизъюнкция их, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме. Очевидно, что число различных макстермов такое же, как и число минтермов, т. е. 2^n, где n — число переменных макстерма.

Между индексами минтермов и макстермов имеется вполне определённая связь, основанная на том, что минтерм — это инверсия макстерма и макстерм — это инверсия минтерма:

$$m_i = \overline{M}_{2^n - i - 1}; \qquad M_i = \overline{m}_{2^n - i - 1},$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$.

Приведённые соотношения справедливы только в том случае, если значение *n* остаётся одним и тем же и в случае минтерма, и в случае макстерма.

Макстермы обладают свойством: дизъюнкция любых двух различных макстермов, зависящих от одних и тех же аргументов, равна единице. Убедиться в этом можно, воспользовавшись рассуждениями по аналогии с минтермами: если два макстерма отличаются друг от друга только инверсиями, то всегда найдётся аргумент, который в один макстерм входит в прямой форме, а во второй — в инверсной. Дизъюнкция таких переменных равна единице. Например, пусть дано $M_4 + M_5$, тогда

$$(A+\overline{B}+\overline{C})+(A+\overline{B}+C)=A+A+\overline{B}+\overline{B}+\overline{C}+C=1,$$

поскольку согласно теореме (17) $\overline{C}+C=1$.

Упражнения

1. (ИРА). Запишите набор, на котором макстерм $A+B+\overline{C}+\overline{D}$ принимает нулевое значение.

2. Запишите двоичные индексы макстермов:

(0ТБ). $A+\overline{B}+\overline{C}+D+E$; (КЛГ). $P+\overline{Q}+R$;

(ВАВ). $\overline{A}+\overline{C}+E+F+K$; (ЕНД). $A+\overline{P}+X+\overline{Z}$;

(УВЕ). $A_1+A_2+\overline{A}_3+\overline{A}_4$.

3. Запишите десятичные индексы макстермов:

(МОЗ). $A+\overline{B}+C+D$; (С5И). $P+\overline{Q}$;

(ШБК). $\alpha+\overline{\beta}+\overline{\gamma}$; (ДЖЛ). $R+S+\overline{T}+\overline{K}$;

(ОММ). $P+Q+\overline{R}+S$; (МЦН). $A+\overline{B}_1+B_2$.

4. Запишите в аналитической форме макстермы, зависящие от четырёх аргументов *A*, *B*, *C*, *D*:

(АЧО). M_3; (ЭУЛ). M_7; (КИР). M_{10};
(ОТС). M_0; (УЛТ). M_{15}; (ЦОУ). M_1.

5. Найдите значения дизъюнкций макстермов:

(ПКФ). $(A+\overline{B}+\overline{C}+D)+(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$;

(ЦВХ). $(A+\overline{B}+\overline{C}+D)+(\overline{A}+D+E)$;

(ЦХЦ). $(P+\overline{Q}+R)+(\overline{A}+B+Q)$;

(НБЧ). $(A+B+D)+(C+D+\overline{E}+\overline{F})$;

(КНШ). $(A+\overline{B}+\overline{K})+(\overline{M}+N)$.

6. (ЕЦА)! Макстерм $f=A+\overline{B}+\overline{C}+D+E$ представлен в виде таблицы соответствия. Сколько единиц расположено в колонке *f* выше нуля? Ниже нуля?

7. (ЛШТ). Сколько существует макстермов шести аргументов?

8. (ШРК). Сколько инверсных аргументов имеет макстерм M_1, зависящий от аргументов *A*, *B*, *C*, *D*, *E*?

9. Запишите десятичные эквиваленты наборов значений аргументов, на которых макстермы, зависящие от аргументов *A*, *B*, *C*, *D*, принимают нулевое значение:

(ХХА). M_4; (МОБ). M_0; (ЛИВ). M_{15};
(ШХГ). M_{10}; (ХВД). M_{14}; (ЮХФ). M_6;
(ЗКЖ). M_{12}; (ИЛИ). M_8.

10. Найдите десятичные индексы макстермов, если они принимают нулевое значение на наборах с номерами (макстермы зависят от пяти аргументов):

(ФВВ). 10; (00Г). 16; (ФИД). 5; (УДЕ). 15;
(ЭХХ). 0; (ЛШК). 31; (ЮУЛ). 14; (ФИП). 2.

11. Найдите *x* (число аргументов равно 5):

(ФА1). $\overline{m}_5=M_x$; (ДХ2). $\overline{m}_{12}=M_x$;

(903). $\overline{m}_0=M_x$; (ЭВЧ). $\overline{M}_7=m_x$;

(695). $\overline{M}_{31}=m_x$; (ДМ6). $\overline{m}_{18}=M_x$.

12. Напишите аналитическое выражение макстерма, зависящего от аргументов *P*, *Q*, *R*, *S*:

(ИЛ1). M_5; (Ф08). M_7; (ТБ9). M_0;
(ДЕО). M_{10}; (ЛКЮ). M_{15}; (АОЯ). M_8.

13. Напишите аналитическое выражение минтерма, являющегося инверсией макстерма, если макстермы зависят от аргументов *A*, *B*, *C*, *D*:

(СИШ). M_6; (КМК). M_{10}; (ЕЕТ). M_{15};
(ШСС). M_0; (ТКР). M_1; (ИЕГ). M_{14}.

14. (ЕВЮ). Укажите номера, где записаны макстермы:

1) $A+B+C+\overline{A}$; 5) $B+B$;

2) X_1+X_2; 6) $E+F+\overline{P}$;

3) $P+QR$; 7) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$.

4) D;

3.3. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Если задана СДНФ некоторой булевой функции *f*, то найти её СКНФ очень легко. В соответствии с основным способом нахождения КНФ, описанным в подразделе 3.1, сначала находим СДНФ инверсии заданной функции. В $\bar{f}$ войдут все минтермы, отсутствующие в *f*, и ни один минтерм не войдёт одновременно в *f* и $\bar{f}$. Затем записываем аналитическое выражение для $\bar{f}$ и результат инвертируем по теореме де Моргана. Проиллюстрируем это примером.

Пусть $f(A,B,C)=(0,1,2,4,5)$. В эту функцию, зависящую от трёх аргументов, не входят минтермы с номерами 3, 6, 7. Следовательно, они войдут в инверсию функции *f*: $\bar{f}=(3,6,7)$.

Представим $\bar{f}$ в виде $\bar{f}=\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC.$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f=(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})=M_4M_1M_0.$$

Это и есть искомая СКНФ заданной функции *f*.

Если исходная функция представлена не в СДНФ, а в какой-либо другой форме — минимальной, тупиковой, сокращённой и др., то сначала необходимо найти её СДНФ. Для этого можно воспользоваться теоремой разложения либо картой Вейча.

Для примера представим в СКНФ функцию

$$f=AB+\overline{A}D+\overline{B}C.$$

По карте Вейча находим СДНФ:

$$f=(1,2,3,5,7,10,11,12,13,14,15).$$

Отсюда следует, что $\bar{f}=(0,4,6,8,9)$;

$$\bar{f}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D;$$

$$\bar{\bar{f}}=f=(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+$$
$$+B+C+D)(\overline{A}+B+C+\overline{D})=M_{15}M_{11}M_9M_7M_6.$$

Упражнения

1. (ЦОП). Укажите номера функций, представленных в виде произведения макстермов:

1) $f=AB+AC+CD$;

2) $f=(A+B)(B+C)(C+D)$;

3) $f=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$;

4) $f=(A+B+C)(A+B+\overline{C})$;

5) $f=A+B+C+D.$

2. Найдите номера минтермов, образующих СДНФ инверсии заданных функций трёх аргументов:

(ХЛЕ). $f = A\overline{B} + C$;

(Т30). $f = AB + \overline{B}C + \overline{A}C$;

(ЭШУ). $f = A + \overline{B}C$;

(МОА). $f = A + BC + A\overline{C}$;

(ЦНТ). $f = (0,1,3,4,7)$;

(КМР). $f = (1,2,3,4,5,6,7)$.

3. Найдите номера минтермов, образующих СДНФ инверсии заданных функций четырёх аргументов:

(ИПА). $f = A + \overline{B} + CD$;

(ЦЛБ). $f = A + B + C$;

(ГЦВ). $f = A + B$;

(АКГ). $f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{D}$;

(ЦРД). $f = (0,1,2,3,4,5,6)$;

(УТС). $f = \overline{A} + BCD + ACD$.

4. Сколько макстермов содержат СКНФ функций, зависящих от четырёх аргументов?

(КБИ). $f = A$. (20Я). $f = ABC$.

(ЯРО). $f = \overline{B}$. (ХМА). $f = ABC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(МАУ). $f = A + \overline{B}$. (ДОЕ). $f = ABCD$.

5. Сколько вхождений аргументов содержат СКНФ следующих функций четырёх аргументов?

(ЦМХ). $f = AB + CD$. (ЛИС). $f = 1$.

(ШРК). $f = A + \overline{B} + C + \overline{D}$. (ВТН). $f = (A + B)C$.

(НКК). $f = (A + B + C)(C + D)$. (ЦУР). $f = \overline{D}$.

6. Сколько минтермов и сколько макстермов содержат функции, зависящие от четырёх аргументов?

(КБА). $f = A + \overline{A}(B + C)$. (УШЕ). $f = B + \overline{B}C$.

(МБС). $f = \overline{A} + \overline{A}(B + \overline{B})$. (БМК). $f = \overline{BD}$.

(ЦОР). $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}D$.

(ТОТ). $f = (A + BC)(\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C})$.

7. Сколько вхождений инверсных аргументов в СКНФ следующих функций, зависящих от трёх аргументов A, B, C?

(ЛУГ). $f = \overline{A}$. (ЗКХ). $f = A + \overline{B}C$.

(МУЦ). $f = 0$. (ИШИ). $f = A\overline{B} + \overline{A}C$.

(УХП). $f = A\overline{B}C$. (00Ф). $f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B + C}$.

3.4. Теорема разложения для КНФ

Любую булеву функцию можно представить в виде

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = [A_1 + f(0, A_2, \ldots, A_n)][\overline{A}_1 + f(1, A_2, \ldots, A_n)].$$

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, достаточно в левую и правую части равенства подставить сначала $A_1 = 1$, а затем $A_1 = 0$. В обоих случаях получится тождество.

Для примера разложим по аргументу A функцию

$$f = AB + CD:$$

$$AB + CD = (A + 0 \cdot B + CD)(\overline{A} + 1 \cdot B + CD) =$$
$$= (A + CD)(\overline{A} + B + CD).$$

Как и в случае дизъюнктивных форм, разложение функции может быть продолжено. Разложим каждое выражение в скобках по переменной B:

$$(A + CD)(\overline{A} + B + CD) = (B + A + CD)(\overline{B} + A + CD)(B + \overline{A} + CD).$$

Каждое из получившихся выражений в скобках разложим по переменной C:

$$(A + B + CD)(A + \overline{B} + CD)(\overline{A} + B + CD) =$$
$$= (C + A + B)(\overline{C} + A + B + D)(C + A + \overline{B})(\overline{C} + A +$$
$$+ \overline{B} + D)(C + \overline{A} + B)(\overline{C} + \overline{A} + B + D).$$

Осталось разложить по аргументу D. Заметим, что в получившемся выражении имеется три макстерма. Если учесть, что макстерм не меняется от преобразований по теореме разложения, то разложить осталось только три дизъюнкции:

$$C + A + B = (D + C + A + B)(\overline{D} + C + A + B);$$
$$C + A + \overline{B} = (D + C + A + \overline{B})(\overline{D} + C + A + \overline{B});$$
$$C + \overline{A} + B = (D + C + \overline{A} + B)(\overline{D} + C + \overline{A} + B).$$

Окончательно получаем:

$$AB + CD = (A + B + C + D)(A + B + C + \overline{D})(A + B +$$
$$+ \overline{C} + D)(A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C} + D)\&$$
$$\& (\overline{A} + B + C + D)(\overline{A} + B + C + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C} + D) =$$
$$= M_{15} M_{14} M_{13} M_{11} M_{10} M_9 M_7 M_6 M_5 .$$

Для всякой булевой функции существует единственная СКНФ, но при условии, что исходная функция и её СКНФ зависят от одних и тех же аргументов. Если же это условие не принять во внимание, то для одной и той же функции можно найти сколько угодно различных СКНФ путём ввода новых аргументов с применением теоремы разложения.

Упражнения

1. Разложите для КНФ по аргументу A функции. В устройство введите число вхождений неинверсных и число вхождений инверсных аргументов:

(ВЕР). $f = A\overline{B} + CD$; (ПОФ). $f = AC + AD$;

(ЯМК). $f = B\overline{C} + \overline{D}\,\overline{E}$; (ФЫЛ). $f = A + B + \overline{C} + D$;

(ЯКЕ). $f = A + B\overline{C}$; (КЗУ). $f = B + C$.

2. Разложите функции для КНФ сначала по аргументу A, затем по аргументу B. В устройство введите число вхождений неинверсных и число вхождений инверсных аргументов (после второго разложения):

(ЛШС). $f = A\overline{C} + AD$;

(ФЗО). $f = CD + \overline{C}\,\overline{D}$;

(ИШП). $f = A + B + C + \overline{A}\,\overline{C}\,D$;

(ТНП). $f = B + C + \overline{D}\,\overline{E} + F$;

(СНА). $f = A + BC\overline{D}E$;

(ЕИВ). $f = \overline{A}\,\overline{B} + AB$.

3. Определите число скобочных выражений функции f, последовательно разложенной по переменным A, B, C, D, E, F:

(55Р). $f = P$; (АТО). $f = AB$;

(ЛБС). $f = EQ$; (КРА). $f = AB + PQ$;

(ЛШТ). $f = P + A\overline{Q}$; (ЛТК). $f = BQ + \overline{B}\,\overline{Q}$.

3.5. Нахождение сокращённых КНФ

Чтобы найти сокращённую КНФ, необходимо действовать в следующей последовательности (см. подраздел 3.1):

а) заданную функцию представляем в СДНФ;

б) находим СДНФ инверсии исходной функции;

в) методом Квайна или каким-либо другим методом находим сокращённую ДНФ для инверсии заданной функции;

г) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти сокращённую КНФ функции

$$f = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{D} + ABC\overline{D}.$$

Условимся считать, что эта функция зависит от четырёх аргументов, тогда её СДНФ представится в виде

$$f = (3,4,6,8,12,14).$$

Воспользовавшись картой Вейча, получаем сокращённую ДНФ для $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \overline{C}D + BD + AD + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана полученный результат. Тогда искомая сокращённая КНФ примет вид

$$f = (C + \overline{D})(\overline{B} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + \overline{C})\&$$
$$\& (A + B + C)(A + B + D).$$

Упражнения

1. Даны СДНФ булевых функций четырёх аргументов. Найдите сокращённую КНФ. При самоконтроле в устройство введите число вхождений аргументов и число инверсий:

(ХП0). $f = (0,1,2,3,4,6,7,8,10,12,14,15)$;

(ВНП). $f = (0,1,2,4,5,6,7,8,10,14,15)$;

(ЖКР). $f = (0,1,2,3,5,7,8,9,10,12,13)$;

(ЛТС). $f = (0,1,2,3,5,7,8,10)$;

(АРТ). $f = (0,2,4,6,9,10,11,14)$.

2. Найдите сокращённые КНФ функции четырёх аргументов. В устройство введите общее число вхождений аргументов, число вхождений неинверсных и число вхождений инверсных аргументов:

(ФУР). $f = BC + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{D}$;

(РПО). $f = A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

(КИС). $f = A\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$.

3.6. Нахождение тупиковых и минимальных КНФ

При нахождении тупиковых и минимальных КНФ булевых функций необходимо действовать в следующей последовательности:

а) найти СДНФ заданной функции *f*;

б) записать СДНФ функции $\bar{f}$;

в) представить функцию $\bar{f}$ в виде сокращённой ДНФ;

г) методом Петрика (либо по карте Вейча, если число аргументов не более 5) найти все тупиковые формы для ДНФ функции $\bar{f}$;

д) все тупиковые формы проинвертировать по теореме де Моргана. Получим список тупиковых КНФ заданной функции *f*;

е) выбрать из тупиковых форм все минимальные по числу вхождений аргументов.

Первые три пункта представляют собой последовательность действий, описанных в предыдущем подразделе. В связи с этим воспользуемся приведённым там примером, т. е. найдём все тупиковые и минимальные КНФ функции

$$f = (3,4,6,8,12,14).$$

Сокращённая ДНФ инверсии этой функции имеет вид

$$\bar{f} = \overline{C}D + BD + AD + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}.$$

Методом Петрика находим все ее тупиковые ДНФ:

$$\bar{f} = BD + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$
$$\bar{f} = BD + AD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$
$$\bar{f} = BD + \overline{C}D + AD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$
$$\bar{f} = BD + AD + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$
$$\bar{f} = BD + \overline{C}D + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана все выражения. Получим пять тупиковых ДНФ:

$$f = (\overline{B} + \overline{D})(C + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + D);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(A + B + C);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(A + B + D);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C)(A + B + D);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(C + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C).$$

Первые два выражения являются минимальными. Они содержат по 10 вхождений букв. Из остальных трёх форм одна содержит 12 и две — по 13 вхождений аргументов.

Упражнения

1. Найдите минимальные КНФ. Определите число вхождений аргументов и число инверсий:

(КТЕ). $f = \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{D} + A\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D}$;

(ИЯЖ). $f = AB + \overline{C} + B\overline{D}$;

(АЯК). $f = A\overline{D} + C + \overline{B}\,\overline{D}$;

(БТЛ). $f = B\overline{C} + A\overline{B}D$;

(ОЙМ). $f = AB + AC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{C}D$.

2. Определите число всех тупиковых КНФ заданной функции, число минимальных форм и число вхождений аргументов для одной из минимальных форм:

(НИС). $f = \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{C}\,\overline{D}$;

(ШТУ). $f = (2,5,9,13,15)$.

3.7. Перевод функций из КНФ в ДНФ

Один из универсальных способов перевода булевой функции из КНФ в ДНФ состоит в раскрытии скобок. Проиллюстрируем его на примере функции

$$f = (A + B)(C + D),$$

заданной в КНФ. Раскроем скобки:

$$f = (A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD.$$

В данном случае после раскрытия скобок получилась минимальная ДНФ той же функции. Уместно задать вопрос: всегда ли в результате раскрытия скобок минимальной КНФ дизъюнктивная форма также является минимальной? Нет, далеко не всегда. Обычно после раскрытия скобок получается произвольная ДНФ, не являющаяся ни совершенной, ни сокращённой, ни тупиковой, ни минимальной. Например, функция

$$f = (A + B + C)(\overline{A} + B + D)$$

после раскрытия скобок даёт выражение

$$f = A\overline{A} + AB + AD + \overline{A}B + B + BD + \overline{A}C + BC + CD.$$

Заметим, что $A\overline{A} = 0$ и что по теореме поглощения

$$AB + \overline{A}B + B + BD + BC = B,$$

тогда получаем

$$f = AD + B + \overline{A}C + CD = B + AD + \overline{A}C.$$

Таким образом, после раскрытия скобок получилась ДНФ, насчитывающая 15 вхождений аргументов (конъюнкцию $A\overline{A}$ не учитываем), в то время как минимальная ДНФ содержит всего пять букв.

Метод раскрытия скобок применим лишь в самых простых случаях, когда КНФ функции состоит из двух-трёх скобочных выражений и число аргументов находится в пределах пяти-шести. Если же КНФ является более сложной, то целесообразнее пользоваться методами инвертирования. Пусть КНФ функции имеет вид

$$f = (A+\overline{C})(C+\overline{D})(B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C).$$

Проинвертируем её по теореме де Моргана:

$$\bar{f} = \overline{A}C+\overline{C}D+\overline{B}C+AB\overline{C}.$$

Получили ДНФ инверсии заданной функции. Обозначим её на карте Вейча нулями, а в остальные клетки запишем единицы, которые дадут СДНФ функции *f*. А по СДНФ нетрудно найти любую другую ДНФ.

Упражнения

1. Заданную КНФ функции представьте в минимальной ДНФ. В устройство введите общее число вхождений аргументов минимальной ДНФ, число простых импликант и число инверсий:

(031). $f = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+B+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$;

(732). $f = (B+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})$;

(АН3). $f = (\overline{B}+\overline{C})(\overline{C}+D)(A+B+D)$.

2. Заданную КНФ представьте в СДНФ. В устройство введите номера минтермов в порядке возрастания:

(РК4). $f = (\overline{A}+\overline{B})(A+B)(\overline{C}+\overline{D})(C+D)$;

(145). $f = (A+B+C)(\overline{A}+C+D)(B+C+D)$;

(396). $f = A(B+C)(\overline{B}+\overline{C})(B+\overline{C}+D)(\overline{B}+C+\overline{D})$.

4. НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЁННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

4.1. Понятие неполностью определённой булевой функции

До сих пор мы рассматривали функции, значения которых известны для всех возможных наборов значений аргументов. Такие функции называются полностью (всюду) определёнными. Однако в случаях применения булевой алгебры очень часто приходится иметь дело с двоичными функциями, значения которых определены не на всех наборах, а лишь на некоторых. На остальных же наборах значения функции не указываются. Введём определение: булева функция заданного числа аргументов называется **неполностью определённой**, если существует хотя бы один набор значений аргументов, для которого не указано значение функции. В таблицах соответствия, а также на картах Вейча неопределённые состояния будем обозначать крестиками.

В табл. 7 приведена функция трёх аргументов. Из таблицы видно, что если $A=B=C=0$, то $f=0$, или сокращённо: $f(0,0,0)=0$.

Аналогично:

$$f(0,0,1)=1;\quad f(0,1,1)=1;\quad f(1,0,0)=1;$$
$$f(1,0,1)=0;\quad f(1,1,1)=1.$$

А на наборах 010 и 110 поставлены крестики. Это значит, что никто не будет выяснять, чему равна функция, если принять $A=C=0,\ B=1$, либо $A=B=1,\ C=0$.

Наборы, на которых функция не определена, иногда называют запрещёнными состояниями, а в [44, с. 98] им дано название избыточных комбинаций.

Упражнения

1. (200). В некоторой таблице соответствия пяти аргументов задана булева функция. В колонке *f* этой таблицы находится 10 единиц и 6 нулей. Сколько существует наборов, на которых функция не определена?

2. (МИУ). Некоторая функция на 20 наборах принимает нулевое значение, на 20 — единичное и на 24 наборах функция не определена. Определите число аргументов, от которых зависит функция.

3. (ЗМА). Функция шести аргументов не определена на всех наборах, содержащих чётное число единиц. Найдите число наборов, на которых функция определена.

4.2. СДНФ неполностью определённых функций

В чём главная особенность неполностью определённых функций? Чем они отличаются от функций, всюду определённых? Наиболее существенная особенность неполностью определённых функций заключается в том, что аналитическая запись их является неоднозначной даже в совершенных формах (СДНФ и СКНФ). Проиллюстрируем это на примере функции, приведённой в табл. 7. Непосредственно по таблице получаем четыре варианта представления этой функции в СДНФ:

1) если $f(0,1,0)=f(1,1,0)=0$, то

$$f_1 = \overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC; \tag{34}$$

2) если $f(0,1,0)=1;\quad f(1,1,0)=0$, то

$$f_2 = \overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC; \tag{35}$$

3) если $f(0,1,0)=0;\quad f(1,1,0)=1$, то

$$f_3 = \overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+ABC; \tag{36}$$

4) если $f(0,1,0)=f(1,1,0)=1$, то

$$f_4 = \overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+ABC. \tag{37}$$

Таблица 7

	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	×
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	×
7	1	1	1	1

Каким образом получены эти варианты и почему они считаются равными? Дело в том, что неопределённые состояния можно обозначать крестиками только на карте Вейча и в таблице соответствия. Но в аналитическом представлении функции крестик поставить невозможно. Всякая функция, записанная аналитически, является полностью определённой. Поэтому, прежде чем выразить функцию через операции И, ИЛИ, НЕ, её необходимо **доопределить**, т. е. заменить крестики нулями или единицами. Функция (34) записана в предположении, что на наборах 010 и 110 она принимает нулевое значение. Поэтому в её СДНФ отсутствуют минтермы m_2 и m_6. Выражение (35) записано в предположении, что на наборе 010 функция принимает единичное значение, т. е. $f(0,1,0)=1$, а на наборе 110 — нулевое: $f(1,1,0)=0$ и т. д.

Разумеется, функции (34) — (37) являются различными, если не знать, что на наборах 010 и 110 они не определены. Рассмотрим, например, выражения (34) и (35). Подставляя различные наборы значений аргументов в ту или другую функцию, мы всякий раз будем находить, что обе функции одновременно принимают либо нулевое, либо единичное значения и лишь на наборе 010 получаем

$$f_1(0,1,0)=0;\qquad f_2(0,1,0)=1,$$

откуда следует, что $f_1 \neq f_2$. Но, как уже упоминалось, всё дело в том, что на наборе 010 (а также на наборе 110) никто не будет проверять значение функций. Значения функции будут определяться только на тех наборах, на которых она определена. А с этой точки зрения функции (34) — (37) являются тождественно равными.

Сколько существует СДНФ неполностью определённых функций? Пусть t — число наборов, на которых функция не определена, тогда всего существует 2^t способов её доопределения и, следовательно, столько же имеется различных СДНФ. В частном случае, когда функция является полностью определённой, наборов, на которых функция не определена, нет. При этом $t = 0$ и $2^0 = 1$, т. е. существует только одна СДНФ полностью определённой функции.

Упражнения

1. (ЕМС). Сколько существует СДНФ функции, которая не определена на пяти наборах значений аргументов?

2. (КЕТ)! Функция имеет 64 различных СДНФ. На 10 наборах она принимает единичное значение, а на 16 — нулевое. Определите число аргументов, от которых зависит функция, и число наборов, на которых функция не определена.

3. (75К). Функция пяти аргументов равна единице на всех наборах, содержащих чётное число единиц, и равна нулю на всех наборах, содержащих чётное число нулей. Найдите число наборов, на которых эта функция не определена.

4. (ЖИР). Функция имеет 128 способов доопределения. Сколько существует СДНФ этой функции?

5. Перечислите все трёхзначные наборы значений аргументов, на которых имеет место равенство (в устройство введите десятичные эквиваленты наборов в порядке возрастания):

(ХБМ). $AB + \overline{B}C = AB\overline{C} + A\overline{B}C$;

(ОЖК). $AB + BC = AC + \overline{B}C$;

(ЭМО). $A + \overline{B}C = B + \overline{A}C$.

6. (ОЛВ). Функция пяти аргументов определена на 20 наборах. Сколько СДНФ можно записать для этой функции?

7. (Я31). Функция $f = AB + A\overline{D} + \overline{A}CD$ не определена на наборах 1, 4, 5, 14, 15. Укажите наборы, на которых функция доопределена единицами, если известно, что она зависит от четырёх аргументов.

4.3. СКНФ неполностью определённых функций

В подразделе 3.3 описан способ нахождения СКНФ для полностью определённых булевых функций. Можно ли этим способом воспользоваться для нахождения СКНФ неполностью определённых функций? Можно, следует лишь помнить, что неопределённые состояния остаются теми же при любых преобразованиях функций.

Нанесём на карту Вейча функцию, приведённую в табл. 7 (рис. 44). Инвертируем её, оставляя крестики на тех же местах (рис. 45).

×	1	1	×
1		1	

Рис. 44

×			×
	1		1

Рис. 45

Доопределяя различным образом функцию $\bar{f}$, получим четыре варианта СДНФ её инверсии и соответственно четыре варианта СКНФ исходной функции f:

1) если $\bar{f}(0,1,0) = \bar{f}(1,1,0) = 0$,

то $f(0,1,0) = f(1,1,0) = 1$, тогда

$\bar{f} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$;

$f = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$;

2) если $\bar{f}(0,1,0) = 1$, $\bar{f}(1,1,0) = 0$,

то $f(0,1,0) = 0$, $f(1,1,0) = 1$, тогда

$\bar{f} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$;

$f = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)$;

3) если $\bar{f}(0,1,0) = 0$, $\bar{f}(1,1,0) = 1$,

то $f(0,1,0) = 1$, $f(1,1,0) = 0$, тогда

$\bar{f} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$;

$f = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$;

4) если $\bar{f}(0,1,0) = \bar{f}(1,1,0) = 1$,

то $f(0,1,0) = f(1,1,0) = 0$, тогда

$\bar{f} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$;

$f = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$.

Число различных СКНФ неполностью определённой функции равно 2^t, где t — число наборов, на которых функция не определена.

Упражнения

1. (КТИ). Найдите число наборов, на которых функция не определена, если она имеет 512 различных СКНФ.

2. (ШРА). Функция пяти аргументов не определена на шести наборах. Сколько существует вариантов её представления в СКНФ?

3. (МТМ). Функция пяти аргументов имеет 32 СКНФ. Сколько существует наборов, на которых функция не определена?

4. (ВЕХ). Функция $f = (\overline{B} + C)(A + \overline{D})(A + B)$, зависящая от четырёх аргументов, не определена на наборах 0, 1, 5, 6, 9. Укажите наборы, на которых она доопределена нулями.

5. (Ш03). Дана функция

$$f = (A + B)(B + \overline{C})(A + \overline{D})(\overline{C} + \overline{D}).$$

В нижеприведённом списке укажите номера функций, равных функции f, если известно, что все функции не определены на наборах 0, 2, 10, 11, 15.

1) $f = A + \overline{D}$;

2) $f = A + B\overline{D}$;

3) $f = \overline{D} + AC$;

4) $f = A + C$;

5) $f = \overline{D} + AD$;

6) $f = \overline{A}\,\overline{D} + A\overline{C} + AB$;

7) $f = AC + \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{D}$.

6. (ВУС). Функция

$$f = (\overline{A} + B + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + C + \overline{D})$$

не определена на наборах 2, 3, 7, 8, 11, 13, 15. Функцию доопределите нулями. Найдите номера минтермов, образующих СДНФ функции f.

4.4. Минимизация ДНФ неполностью определённых функций

Известно, что если функция не определена на n наборах, то существует 2^n доопределённых СДНФ и 2^n доопределённых СКНФ. Каждая из них единственным образом представима в сокращённой форме. Следовательно, всякая функция, не определённая на n наборах, имеет 2^n сокращённых ДНФ и 2^n сокращённых КНФ. Например, для функции, приведённой в табл. 7, существует четыре варианта представления в сокращённой ДНФ:

1) если $f(0,1,0) = f(1,1,0) = 0,$

то $f_1 = A\overline{B}\,\overline{C} + BC + \overline{A}C;$

2) если $f(0,1,0) = 1;\quad f(1,1,0) = 0,$

то $f_2 = A\overline{B}\,\overline{C} + BC + \overline{A}C + \overline{A}B;$

3) если $f(0,1,0) = 0;\quad f(1,1,0) = 1,$

то $f_3 = A\overline{C} + AB + BC + \overline{A}C;$

4) если $f(0,1,0) = f(1,1,0) = 1,$

то $f_4 = A\overline{C} + \overline{A}C + B,$

и четыре варианта представления в сокращённой КНФ:

1) если $f(0,1,0) = f(1,1,0) = 0,$

то $f_5 = (\overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + C);$

2) если $f(0,1,0) = 1;\quad f(1,1,0) = 0,$

то $f_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C);$

3) если $f(0,1,0) = 0;\quad f(1,1,0) = 1,$

то $f_7 = (\overline{A} + B + \overline{C})(A + C);$

4) если $f(0,1,0) = f(1,1,0) = 1,$

то $(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C).$

Получены эти варианты следующим образом. Сначала был выбран способ доопределения. Например, выражения f_1 и f_5 доопределены нулями, т. е. на неопределённых наборах значения функции приняты равными нулю. После доопределения функция стала полностью определённой, поэтому для нахождения сокращённой формы можно применить метод Квайна или карту Вейча.

Известно, что сокращённая форма функции часто не является минимальной, поэтому в общем случае каждую сокращённую форму необходимо исследовать методом Петрика и из всех тупиковых форм выбрать минимальные. Однако такой подход целесообразен только в случае сложных функций многих аргументов, для минимизации которых используется ЭВМ. Если же число аргументов не превышает 5—6, то неплохие результаты даёт карта Вейча.

Пример 1. Пусть функция

$$f = A\overline{B}D + \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$

не определена на наборах 0, 3, 5, 6, 15. Требуется найти минимальную форму.

Если не учитывать неопределённые состояния, что эквивалентно доопределению нулями, то минимальная форма содержит 14 вхождений аргументов.

		×	
	×	1	×
1	1	×	1
		1	×

Рис. 46

Если же выбрать иной вариант доопределения, то число вхождений аргументов можно значительно уменьшить. Нанесём функцию на карту Вейча (рис. 46) и на ней же отметим неопределённые состояния. По карте видно, что три единицы, расположенные в строку, можно объединить конъюнкцией $\overline{B}D,$ заменив крестик клетки 3 единицей. Две единицы, расположенные в колонку, могут быть представлены одной конъюнкцией $\overline{A}C,$ если крестик клетки 6 заменить единицей. Остальные крестики заменяем нулями. Получим

$$f = \overline{B}D + \overline{A}C,$$

что представляет собой самое короткое выражение из всех возможных в классе ДНФ.

Пример 2. Пусть функция

$$f(A, B, C, D) = (3, 6, 12, 13, 14)$$

не определена на наборах 7, 15. Требуется найти минимальную форму.

Нанесём функцию на карту Вейча и отметим на ней неопределённые состояния (рис. 47). Если функцию доопределить нулями, то в минимальное выражение войдёт минтерм m_3, поскольку он не объединяется ни с какими другими минтермами. Если же крестик клетки 7 заменить единицей, то вместо минтерма m_3 можно записать конъюнкцию $\overline{A}CD.$ Таким образом, на наборе 0111 функцию следует доопределить единицей. Остался один крестик. Заменим его нулём, тогда в минимальную форму войдут конъюнкции $AB\overline{C}$ и $BC\overline{D}.$ Если же этот крестик заменить единицей, то все шесть единиц можно представить конъюнкциями AB и BC. В результате минимальная форма примет вид

$$f = AB + BC + \overline{A}CD.$$

Таким образом, в данном случае, чтобы получить минимальную форму, функцию необходимо доопределить единицами.

Пример 3. Функция четырёх аргументов

$$f = (3, 5, 6, 7, 11, 14)$$

не определена на наборах 0, 2, 9, 13. Требуется найти минимальную форму.

1	1	1	
1	×	×	
		1	

Рис. 47

	1	1	
×		1	1
×	1	1	
		×	×

Рис. 48

Нанесём функцию и неопределённые состояния на карту Вейча (рис. 48). Минимизацию начинаем с единиц, единственным образом образующих простые импликанты. В данном случае надо начать с минтерма 14, который объединяется только с минтермом 6, в результате чего получаем $BC\overline{D}.$ Минтерм 5 имеет два варианта объединения: с крестиком 13 и минтермом 7. Объединять надо с минтермом (не с крестиком). Получаем $\overline{A}BD.$ Остались две единицы, которые дают конъюнкцию $\overline{B}CD.$ Таким образом, минимальная форма

$$f = BC\overline{D} + \overline{A}BD + \overline{B}CD$$

получается в том случае, если функцию доопределить нулями.

Можно ли дать какие-либо общие рекомендации по минимизации булевых функций с учётом неопределённых состояний? Можно. Во-первых, начинать необходимо с тех единиц, которые, объединяясь с единицами, дают единственную простую импликанту. Во-вторых, если есть возможность объединить какую-либо единицу с единицей или крестиком, то объединять необходимо с единицей. В-третьих, если группа единиц совместно с крестиками дает возможность представления ее более короткой конъюнкцией, то соответствующие крестики необходимо заменить единицами.

Для иллюстрации сказанного на рис. 49—54 приведены примеры нахождения минимальных форм.

A

B	×	1	1	1
				1
	×	1	1	1
			×	×

D

C

$f = B\overline{D} + \overline{B}D + \overline{A}\overline{C}$

Рис. 49

P

	×			1
Q	1	1	×	
		×	1	
	1			×

S

R

$f = \overline{R}\,\overline{S} + RS + PQS$

Рис. 50

P

	×		1	
Q	×		×	
	1	1		1
	×	1		

S

R

$f = P\overline{Q} + \overline{P}QR +$
$+ \overline{Q}\,\overline{R}S$

Рис. 51

X

Y	×		1	
	1	×	1	×

Z

$f = \overline{Y} + \overline{X}Z$

Рис. 52

X

Y	×	1	1	
	1		×	×

Z

$f = YZ + \overline{Y}\,\overline{Z} =$
$= YZ + X\overline{Z}$

Рис. 53

A

B	×	1		1
	×		1	

C

$f = AB + B\overline{C} +$
$+ \overline{A}\,\overline{B}C$

Рис. 54

Упражнения

1. Найдите минимальные ДНФ функций трёх аргументов (буквы упорядочить по алфавиту). Здесь и в дальнейшем неопределенные состояния будем указывать в фигурных скобках.

(ЖКМ). $f = (1,5,6,7)$; {0, 2, 4}.

(ЛИТ). $f = (0,1,2,5,7)$; {3, 4}.

(ШКК). $f = (0,3,6)$; {1, 2, 5, 7}.

(ФЭП). $f = (1,3,5,7)$; {0, 2, 4}.

(ТВР). $f = A\overline{C} + BC + \overline{A}\,\overline{B}$; {0, 2, 4}.

2. Найдите минимальные ДНФ функций четырёх аргументов. В устройство введите число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсий.

(НУС). $f = (0,3,5,7,14)$; {8, 9, 12}.

(АЧУ). $f = A\overline{B}C + \overline{A}BD + AB\overline{C}D$; {2, 4, 8, 10, 14, 15}.

(ШИФ). $f = ABD + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$; {0, 1, 4, 6, 11, 15}.

(МВХ). $f = (0,3,7,9,14)$; {8, 10, 11}.

(ЕЦ8). $f = (3,5,6,7,10,15)$; {1, 4, 8, 9, 12}.

3. Найдите минимальные ДНФ функций четырёх аргументов. В устройство введите десятичные номера состояний, на которых функция доопределена единицами.

(ВЭВ). $f = (3,5,6,13)$; {2, 7, 9, 11, 15}.

(ШПГ). $f = (3,6,13)$; {1, 2, 5, 7, 9, 10, 14}.

(ВИО). $f = (2,7,10,11,13)$; {1, 3, 5, 6, 9, 14, 15}.

(НШФ). $f = (4,5,6,8,11,15)$; {0, 3, 7, 9, 12}.

4.5. Минимизация КНФ неполностью определённых функций

При нахождении минимальных КНФ неопределёнными остаются те же состояния. Поэтому минимизация КНФ осуществляется так же, как и ДНФ, но с учётом двойного инвертирования:

1) наносим функцию на карту Вейча, отмечаем неопределённые состояния;

2) наносим на вторую карту Вейча инверсию функции. Крестиками отмечаем те же неопределённые состояния;

3) находим минимальную форму;

4) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Пример 1. Найдём минимальную КНФ функции четырёх аргументов $f = (1,4,9,11,12)$, не определённой на состояниях 0, 5, 7, 8, 13, 15.

1			1
×	×	×	×
1	1		1
×			×

Рис. 55

	1	1	
×	×	×	×
		1	
×	1	1	×

Рис. 56

На рис. 55 изображена карта Вейча с заданной функцией и неопределёнными состояниями. На рис. 56 приведена карта Вейча, на которую нанесена инверсия заданной функции и неопределённые состояния. Анализируем карту. На ней имеется одна единица (минтерм 3), которая даёт единственным образом простую импликанту $\overline{A}C$, если на состоянии 7 функцию $\bar{f}$ доопределить единицей. Оставшиеся две единицы (минтермы 10 и 14) вместе с соседними (минтермами 2 и 6) дают ещё одну простую импликанту $C\overline{D}$. Таким образом, получаем:

$$\bar{f} = \overline{A}C + C\overline{D}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = (A + \overline{C})(\overline{C} + D).$$

Пример 2. Найдем минимальные ДНФ и КНФ функции четырёх аргументов

$$f = (3,7,11,12,13,14),$$

если функция не определена на наборах 5, 10, 15.

1	1		
1	×	1	×
	1	1	
	×		

Рис. 57

		1	1
	×		×
1			1
1	×	1	1

Рис. 58

Найдём сначала минимальную ДНФ. Для этого на наборе 15 (рис. 57) функцию необходимо доопределить единицей, а на остальных двух наборах — нулями. Тогда получим: $f = AB + CD$.

Переходим к карте, изображённой на рис. 58, на которую нанесена инверсия заданной функции. Минимальная форма инверсной функции получается при доопределении её нулями:

$$\bar{f} = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = (A + D)(B + C).$$

Это и есть минимальная КНФ заданной функции.

Упражнения

1. Найти минимальные КНФ функций четырёх аргументов. В устройство ввести число вхождений аргументов и число инверсий в минимальной КНФ.

(ВТР). $f = (0,1,4,8,9,11,12)$; {2, 5, 7, 10, 14}.

(ЛЦС). $f = (0,2,3,4,7,8,12)$; {1, 10, 11, 13, 14}.

(АЛТ). $f = (3,4,11,12,13,15)$; {0, 5, 6, 7, 9, 10}.

(КЛУ). $f = (3,4,6,7,12)$; {0, 1, 2, 8, 9}.

(ЛТФ). $f = (1,2,9,10,13,14)$; {0, 3, 4, 5, 12, 15}.

(ИЯХ). $f = (0,8,9,11)$; {2, 12, 14, 15}.

(ТПЦ). $f = (1,3,6,8,9,14)$; {0, 2, 5, 13}.

(ПЛИ). $f = (3,4,7,8,11,12,13,14,15)$; {0,1,2,5,6,9,10}.

2. Найдите минимальные КНФ. В устройство введите число вхождений аргументов и число инверсий.

(ТПА). $f = B\overline{D} + A\overline{C}D + \overline{A}CD + \overline{B}\,\overline{C}D$; {2, 4, 8, 14}.

(ШЭБ). $f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + AB\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$; {2, 6, 7, 10, 15}.

(ЛЕВ). $f = A\overline{B}D + \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}D$; {8, 10}.

(АГГ). $f = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + A\overline{B}D$; {0, 2, 5, 6, 8, 10, 13}.

(35Д). $f = CD + \overline{C}\,\overline{D} + AB$; {1, 2, 5, 6, 9, 10, 14}.

5. ФОРМЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Понятие порядка булевой функции

До сих пор мы рассматривали функции, аналитически представленные либо в виде дизъюнкции конъюнкций, либо конъюнкции дизъюнкций. Все такие формы называются нормальными. Кроме них, существуют **формы высших порядков**. Например:

$$f = (A + BC)(D + E).$$

Эта функция не является нормальной, так как хотя она и представлена в виде произведения сумм, но в скобочных выражениях суммируются не только одиночные аргументы: первый сомножитель представлен дизъюнкцией аргумента *A* и конъюнкции аргументов *B* и *C*.

Прежде чем рассматривать формы высших порядков, выясним, что такое **порядок функции**. Функция имеет нулевой порядок, если она изображается отдельным аргументом или его инверсией, при этом аргумент не может быть функцией других аргументов. Например:

$$f = A,\quad f = \overline{B},\quad f = \alpha,\quad f = \overline{\beta}\ \text{ и т. д.}$$

К выражениям нулевого порядка относятся также две функции вида $f = 0$ и $f = 1$.

Функция имеет первый порядок в трех случаях:

1) если она представлена в виде суммы (дизъюнкции) отдельных аргументов, взятых в прямой или инверсной форме, например:

$$f = \overline{A} + B + C; \tag{38}$$

2) если она представлена в виде конъюнкции нескольких аргументов, взятых в прямой или инверсной форме, например:

$$f = A\overline{B}\,\overline{C}D; \tag{39}$$

3) если она представлена в виде инверсии некоторого символа, изображающего функцию ненулевого порядка, например:

$$f = \overline{\varphi}, \tag{40}$$

где φ — функция не ниже первого порядка.

Если вместо какого-либо неинверсного аргумента функции (38) подставить конъюнкцию некоторых аргументов (т.е. применить операцию суперпозиции — об этом см. с. 21 второй части данного пособия), то получим выражение второго порядка. Например:

$$f = \overline{A} + B + CD\overline{E}. \tag{41}$$

Аналогично, если вместо какого-либо неинверсного аргумента функции (39) подставить некоторую дизъюнкцию, то получим выражение также второго порядка. Например:

$$f = A\overline{B}\,\overline{C}(A + \overline{D}). \tag{42}$$

Если над дизъюнкцией или конъюнкцией поставить знак инверсии, то их порядок повысится на единицу и станет равным двум. Например:

$$f = \overline{AB\overline{C}};\qquad f = \overline{A + \overline{B} + C + D}.$$

Если вместо какого-либо неинверсного аргумента, входящего в конъюнкцию функции (41), подставить некоторую дизъюнкцию, то получим выражение третьего порядка. Например: $f = \overline{A} + B + C\overline{E}(P + \overline{Q} + R)$.

Аналогично, если вместо какого-либо неинверсного аргумента, входящего в дизъюнкцию функции (42), подставить некоторую конъюнкцию, то получим выражение 3-го порядка. Например: $f = A\overline{B}\,\overline{C}(PK + \overline{D})$ и т. д.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Функция

$$f = (AB + C)(CD + E)$$

представлена в форме третьего порядка. Первый порядок даёт операция конъюнкции между скобками, а в каждой из скобок записано выражение второго порядка.

Пример 2. Функция

$$f = (A + BC)D + E$$

имеет четвёртый порядок: первый образует дизъюнкция, находящаяся вне скобок, второй — конъюнкция, находящаяся вне скобок, третий — дизъюнкция в скобках и четвёртый — конъюнкция в скобках.

Пример 3. Функция

$$f = [(A + BC)(D + E) + K]M + N$$

имеет шестой порядок: первый даёт дизъюнкция вне квадратных скобок, второй — конъюнкция вне квадратных скобок, третий — дизъюнкция в квадратных скобках, четвёртый — конъюнкция между круглыми скобками, пятый — дизъюнкция в круглых скобках и шестой — конъюнкция в круглых скобках.

Упражнения

1. (УМ0). Укажите номера функций нулевого порядка:

1) $f = AB$; 4) $f = \overline{X}\cdot X$; 7) $f = 0$;
2) $f = AA$; 5) $f = A\cdot\overline{A} + A$; 8) $f = \overline{X}$.
3) $f = A$; 6) $f = 1$;

2. (АВЕ). Укажите номера функций второго порядка:

1) $f = BC$; 6) $f = C(C + C)$;
2) $f = AA + A$; 7) $f = C(C + C)(C + C)$;
3) $f = BC + DE + FK$; 8) $f = A\overline{A}B\overline{B}$;
4) $f = (AB + C)D$; 9) $f = A\overline{A} + 0$.
5) $f = (A + A)(A + AA)$;

3. (ЕЙХ). Укажите номера функций первого порядка:

1) $f = A\cdot 0$; 4) $f = 1 + 1$; 7) $f = B + C$;
2) $f = A\cdot\overline{A}$; 5) $f = A + B$; 8) $f = A(A + A)$;
3) $f = C\overline{C} + 1$; 6) $f = A + 0$; 9) $f = A + AB$.

4. Найдите порядок функций:

(ХВД). $f = A + B + \overline{C} + D$;

(ХХЕ). $f = PQ\overline{R}\,\overline{S}$;

(СОР). $f = PQ\overline{RS}$;

(НВЖ). $f = \overline{\overline{AB}C} + E$;

(ТЛК). $f = (A + A)A + A$;

(ТПЛ). $f = (A + BC)(A + BC)$;

(МБМ). $f = (A + BC)(A + \overline{B}C)A + \overline{A}$.

5. (ПУН). Укажите номера функций третьего порядка:

1) $f = AB + CD$; 4) $f = (A + \overline{A}A)A$;
2) $f = (A + BC)D + E$; 5) $f = (A + BC)(A + B)$;
3) $f = (A + AB)A$; 6) $f = (A + B)(A + B) + A$.

5.2. Граф-схема булевой функции

Если порядок функции невелик, то его нетрудно определить непосредственно по выражению функции. Но в более сложных случаях возможны ошибки. Чтобы их избежать, следует воспользоваться граф-схемой булевой функции. Построение граф-схемы (порядкового дерева) поясним на примере функции вида

$$f = \overline{(\overline{A} + BC)E + AB\overline{D}} + C. \qquad (43)$$

Представим ее в виде

$$f = \varphi_1 + C, \qquad (44)$$

где

$$\varphi_1 = \overline{(\overline{A} + BC)E + AB\overline{D}}. \qquad (45)$$

Выражение (44) представляет собой дизъюнкцию двух аргументов, следовательно, оно имеет первый порядок. Отмечаем это на граф-схеме (рис. 59): ставим точку, обозначаем её буквой f. Получили корень порядкового дерева. От точки f отводим две ветви согласно числу слагаемых выражения (44) и в концах ветвей записываем символы φ_1 и C, а под точкой f ставим знак дизъюнкции. Это значит, что символы, которыми оканчиваются ветви, логически суммируются и в результате дают выражение

$$f = \varphi_1 + C.$$

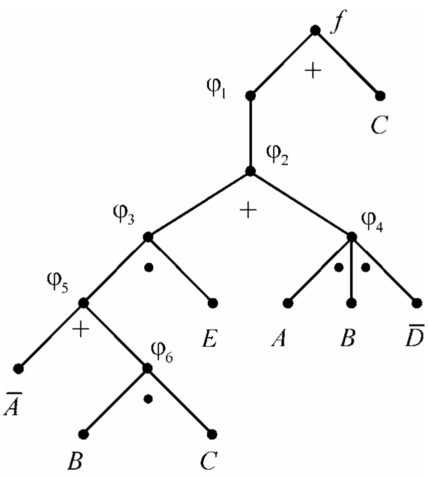


Рис. 59

Правая ветвь оканчивается буквой C. Поскольку это аргумент функции, не являющийся функцией других аргументов, то дальше ветвь не продолжается. Переходим к левой ветви, оканчивающейся знаком φ_1. Представим выражение (45) в виде $\varphi_1 = \overline{\varphi}_2$, где

$$\varphi_2 = (\overline{A} + BC)E + AB\overline{D}.$$

Из точки φ_1 отводим только одну ветвь и заканчиваем её символом φ_2. Знака отрицания под точкой φ_1 не ставим, условимся считать, что если из точки выходит одиночная ветвь, то символы, записанные на её концах, являются взаимно инверсными.

Выражение φ_2 снова представляем в виде дизъюнкции двух аргументов: $\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4$, где

$$\varphi_3 = (\overline{A} + BC)E; \qquad \varphi_4 = AB\overline{D}.$$

От точки φ_2 отводим две ветви и заканчиваем их символами φ_3 и φ_4. Под точкой φ_2 записываем знак дизъюнкции.

Выражение φ_3 в свою очередь представляем в виде

$$\varphi_3 = \varphi_5 \cdot E,$$

где $\varphi_5 = \overline{A} + BC$. В соответствии с этим от точки φ_3 отводим две ветви, заканчивая их символами φ_5 и E, а под точкой φ_3 ставим знак конъюнкции.

Выражение φ_4 имеет вид

$$\varphi_4 = AB\overline{D}.$$

От точки φ_4 отводим три ветви, так как выражение φ_4 представляет собой конъюнкцию трёх аргументов. На концах ветвей записываем аргументы A, B и $\overline{D}$, а под точкой φ_4, т. е. между ветвями, ставим знак конъюнкции.

Буквами E, A, B, $\overline{D}$ ветви заканчиваются, продолжается только ветвь φ_5:

$$\varphi_5 = \overline{A} + \varphi_6,$$

где $\varphi_6 = BC$. От точки φ_5 отводим две ветви и заканчиваем их символами $\overline{A}$ и φ_6. Под точкой φ_5 ставим знак дизъюнкции.

Осталась одна ветвь, последняя, она заканчивается буквами B и C, поскольку

$$\varphi_6 = BC.$$

Под точкой φ_6 ставим знак конъюнкции и на этом построение порядкового дерева заканчиваем.

По граф-схеме видно, что существует восемь неодинаковых по длине путей, ведущих от корня дерева до концов ветвей, т. е. столько же, сколько вхождений аргументов имеет функция. Например, путь f — C имеет всего лишь одну ветвь. Это самый короткий путь. От корня до точки E ведут 4 ветви, до точки $\overline{A}$ — пять, до точек B и C — по шесть ветвей. Порядок функции определяется числом ветвей самого длинного пути, следовательно, функция (43) имеет шестой порядок.

Упражнения

1. Постройте порядковое дерево для каждой из функций и определите:

а) порядок функции;

б) число самых длинных путей, ведущих от корня дерева к концам его ветвей, обозначенных аргументами функций:

(ШРА)! $f = [(AB + C)D + E]P + [Q(R + ST) + T]M;$

(ШТБ)! $f = [(A + BC + EF)(\overline{A} + \overline{B} + CDE) + KL]A + B;$

(ЛТВ)! $f = [(ABC + A\overline{C})AB + C]B + C;$

(ИПГ)! $f = [(A + B + C + D)(D + E)AB + P]\ \&$
$\&\ [(A + B + C)D + E] + K;$

(ШОТ)! $f = [(A + \overline{A}B + AC)AD +$
$+ \overline{(A + B + C)(C + D + E)E} + \overline{K}]P + A\overline{B}.$

2. (ИНЗ). На рис. 60 приведена граф-схема некоторой функции f. Найдите её аналитическое выражение. Минимальную ДНФ этой функции введите в устройство «Символ».

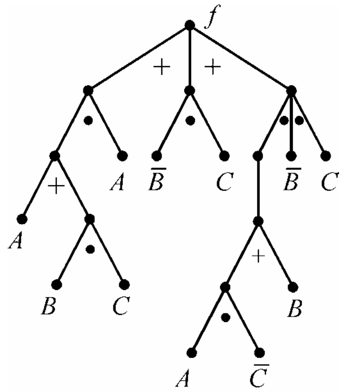


Рис. 60

3. (АТИ). На рис. 61 приведена граф-схема функции *f*. Запишите аналитическое выражение этой функции. Минимальную ДНФ функции введите в устройство.

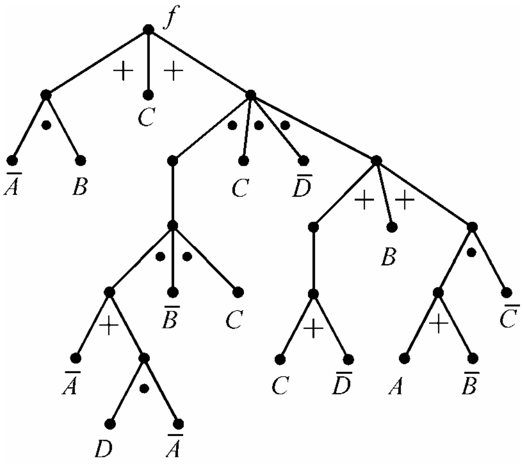


Рис. 61

5.3. Абсолютно минимальные формы

Формы высших порядков привлекают исследователей тем, что очень часто повышение порядка функции приводит к уменьшению числа вхождений аргументов. Например, минимальная ДНФ функции

$$f = AB\overline{C} + AB\overline{D} + \overline{A}CD + \overline{A}\,\overline{B}D$$

имеет 12 вхождений букв, но если повысить её порядок до третьего, то получим выражение

$$f = AB(\overline{C} + \overline{D}) + \overline{A}D(\overline{B} + C),$$

которое имеет лишь восемь вхождений аргументов.

Функция

$$f = ABCD + AB\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

в классе ДНФ вообще не поддаётся минимизации, но если повысить её порядок, то число вхождений аргументов можно уменьшить вдвое:

$$f = (AB + \overline{A}\,\overline{B})(CD + \overline{C}\,\overline{D}).$$

Возникает вопрос, не существует ли алгоритма, позволяющего для любой функции найти среди форм высшего порядка **абсолютно минимальную форму**, которая по сравнению с любыми другими формами имела бы наименьшее число вхождений букв. Абхъянкаром был предложен такой алгоритм, однако практически его использовать невозможно даже для функций четырёх аргументов с применением самой быстродействующей ЭВМ. Только на последнем этапе нахождения абсолютно минимальной формы функции четырёх аргументов число t необходимых элементарных операций оценивается как

$$2^{256} \le t \le 2^{65536}$$

либо, если учесть, что $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, то

$$10^{75} \le t \le 10^{19659}.$$

Если ЭВМ будет выполнять 10 миллиардов операций в секунду, то потребуется не менее чем 10^{65} секунд, а если учесть, что в году около 32 миллионов секунд, то потребуется $3 \cdot 10^{57}$ лет. Так что алгоритм Абхъянкара имеет не более чем теоретическое значение.

В [23, с. 189] о формах высших порядков говорится следующее: «Для получения скобочных форм можно едва ли что-либо предложить, кроме перебора всех вариантов группирования переменных. Однако даже в этом случае нет уверенности, что будет получено наилучшее решение».

Таким образом, задача нахождения абсолютно минимальных форм представляет собой одну из проблем булевой алгебры, относительно которой сказать что-либо определённое пока невозможно.

5.4. Повышение порядка булевых функций

Поскольку проблема абсолютно минимальных форм пока не решена, то можно пользоваться приёмами, позволяющими значительно сократить число вхождений аргументов за счёт повышения порядка функций. Один из этих приёмов поясним на примере функции

$$f = BCD + A\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}. \quad (46)$$

Запишем в ряд аргументы этой функции сначала в прямой форме, а затем в инверсной (табл. 8).

Слева отведём специальную колонку и в ней перечислим все простые импликанты заданной минимальной ДНФ. Затем единицами отметим буквы, из которых состоят простые импликанты: импликанта *BCD* состоит из букв *B*, *C*, *D*. В колонках *B*, *C*, *D* на пересечении со строкой, где записана импликанта *BCD*, поставим единицы. Точно таким же образом заполняем всю таблицу.

Таблица 8

	A	B	C	D	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{D}$
BCD		1	1	1				
$A\overline{B}\,\overline{C}$	1					1	1	
$B\overline{C}\,\overline{D}$		1					1	1
$\overline{A}\,\overline{B}C$			1		1	1		
$\overline{A}B\overline{C}$		1			1		1	
$\overline{B}C\overline{D}$			1			1		1

Анализируем получившуюся матрицу. В колонке *A* находится одна единица. Это значит, что аргумент *A* входит только в одну простую импликанту $A\overline{B}\,\overline{C}$. В колонке *B* находятся три единицы: буква *B* входит в импликанты *BCD*, $B\overline{C}\,\overline{D}$ и $\overline{A}B\overline{C}$. Это значит, что из всех трёх импликант букву *B* можно вынести за скобки и их дизъюнкцию заменить выражением

$$B(CD + \overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}).$$

То же самое относится ко всем колонкам. Таким образом, глядя на матрицу, можно сразу сказать, какие буквы выносятся за скобки.

Пусть решено вынести букву *B*, тогда из оставшихся импликант можно вынести букву $\overline{B}$. В результате получим выражение четвёртого порядка, имеющее 14 вхождений аргументов:

$$f = B(CD + \overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}) + \overline{B}(A\overline{C} + \overline{A}C + C\overline{D}),$$

в то время как минимальная ДНФ функции (46) имеет 18 вхождений букв.

Для скобочных выражений в свою очередь следует построить матрицу, но поскольку эти выражения просты, то можно непосредственно найти буквы, которые выносятся за скобки:

$$f = B[CD + \overline{C}(\overline{A} + \overline{D})] + \overline{B}[A\overline{C} + C(\overline{A} + \overline{D})].$$

Получившееся выражение имеет пятый порядок и 12 вхождений аргументов.

Можно получить другое выражение с тем же порядком и тем же числом вхождений букв, если вынести буквы *C* и $\overline{C}$:

$$f = C[BD + \overline{B}(\overline{A} + \overline{D})] + \overline{C}[A\overline{B} + B(\overline{A} + \overline{D})].$$

Исходное выражение имеет много минимальных ДНФ, по 18 вхождений аргументов каждая, поэтому в общем случае следует все их проверить и выяснить, не найдётся ли среди них выражения, для которого форма высшего порядка имеет меньше 12 вхождений аргументов. Кроме того, можно исследовать и минимальные КНФ, для чего необходимо выполнить следующие операции:

а) находим минимальную ДНФ инверсии заданной функции;

б) повышаем её порядок;

в) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Минимальная КНФ выражения (46) имеет 14 вхождений аргументов:

$$f = (\overline{B} + \overline{C} + D)(A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D}).$$

Если повысить её порядок, то найдём ещё несколько форм высших порядков по 12 вхождений аргументов каждая. Одна из них имеет вид

$$f = (\overline{A} + \overline{D} + \overline{B}\,\overline{C} + BC)(\overline{B} + \overline{C} + D)(A + B + C).$$

Упражнения

1. Найдите минимальные ДНФ функций, представленных в формах высших порядков. Определите число простых импликант и число вхождений аргументов:

(НАР). $f = [(A + BC)\overline{A} + BC]D + ACD$;

(НАС). $f = (AB + \overline{A}\,\overline{B})(AC + \overline{A}\,\overline{C})(CD + \overline{C}\,\overline{D})$;

(ХХ0). $f = (AC + BD)(\overline{A}B + BC)(AD + \overline{A}\,\overline{D})$;

(НЮА). $f = (\overline{A}B + \overline{B}C + \overline{A}D)(A + \overline{B} + \overline{C} + D)$;

(МТМ). $f = [(A + BC)D + E][(\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C})\overline{D} + \overline{E}]$;

(АЛП). $f = [A + \overline{B}(C + D)][\overline{B} + B(C + \overline{A}D)]$.

2. Найдите минимальную ДНФ. Повысьте порядок функции путём вынесения за скобки. В устройство введите число вхождений аргументов минимальной ДНФ и число вхождений аргументов выражения, получившегося после повышения порядка:

(ОЛК). $f = (1,2,3,4,5,6,7,13,15)$;

(ЪЪТ). $f = (2,3,4,5,6,7,9,11,13,15)$;

(ВЦ0). $f = (5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$;

(МРР). $f = (4,6,7,8,9,11,12,13,14,15)$;

(ЗЕА). $f = (1,4,7,10,14,15)$;

(ТКС). $f = (2,3,4,7,8,12,15)$;

(ЦШУ). $f = (0,4,8,13,14,15)$.

3. Найдите минимальную КНФ. Повысьте её порядок путём вынесения за скобки. В устройство введите число вхождений аргументов минимальной КНФ и число вхождений аргументов выражения, получившегося после повышения порядка:

(ЗИА). $f = (0,1,2,3,4,5,9,11,13,14)$;

(МТР). $f = (0,1,2,8,12)$;

(ХШР). $f = (1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,13,14)$;

(ННК). $f = (0,3,4,5,6,9,11,13,15)$.

4. Повысьте порядок функций путём вынесения за скобки. В устройство введите число вхождений аргументов и число инверсий:

(УТМ). $f = A\overline{B} + A\overline{D} + A\overline{C} + \overline{A}BCD$;

(ГЦО). $f = \overline{A}\,\overline{B} + ABD + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{D}$;

(ХЛП). $f = B\overline{D} + AD + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}$;

(ЛГН). $f = ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + BCD + \overline{B}\,\overline{C}D$;

(ЛШУ). $f = \overline{A}BC + \overline{A}BD + A\overline{B}D + A\overline{B}C$;

(ДИФ). $f = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}CD + \overline{A}BD$.

5.5. Классификация форм булевых функций

Используя правила тождественных преобразований, всякую булеву функцию можно представить бесконечным числом способов. Например, для функции $f = A + \overline{B}$ имеем:

$$\begin{aligned} f &= A + \overline{B} = A + \overline{B} + A\overline{B} = A + \overline{B} + AB = A + \overline{B} + \overline{B}C = \\ &= AB + AC + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD = A(B + C) + \\ &+ \overline{B}(\overline{C} + \overline{D} + \overline{A}CD) = A[B(C + D) + \overline{C}(\overline{B}D + B\overline{D}) + \\ &+ CD] + \overline{B}(CD + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{D}) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Из всего многообразия форм представления булевых функций наиболее исследованы только нормальные формы, представленные в виде дизъюнкции конъюнкций (ДНФ) либо в виде конъюнкции дизъюнкций (КНФ). Следовательно, все формы представления булевых функций делятся на два класса — это нормальные формы и формы высших порядков (рис. 62).

Нормальные формы распадаются на два класса — дизъюнктивные и конъюнктивные, которые в свою очередь делятся на совершенные, сокращённые, тупиковые и минимальные.

Таким образом, вполне завершённую классификацию имеют лишь нормальные формы булевых функций.

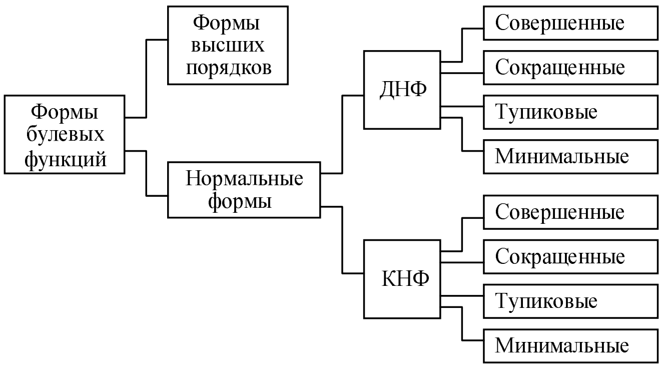


Рис. 62

5.6. О классификации форм высших порядков

Возможна ли классификация форм высших порядков? Ведь их существует бесконечно много. Это ещё одна из нерешенных проблем булевой алгебры. Однако на практике очень часто приходится иметь дело с формами высших порядков, поэтому здесь уделим им некоторое внимание.

Если неизвестно, существует ли классификация форм высших порядков, подобно классификации нормальных форм, то мы можем сами задать ту форму, к которой хотим свести заданную функцию. Эту форму будем задавать в виде булевой функции, аргументами которой являются функции φ_i $(i = 1, 2, \ldots, k;\ \ k > 1,\ k$ — целое число), зависящие от тех же аргументов, что и функция f, и имеющие порядок не ниже первого.

Пример 1. Представим функцию $f = AB + CD$ в виде конъюнкции двух функций второго порядка:

$$f = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = AB + CD.$$

Поскольку нет никаких ограничений на вид функций φ_1 и φ_2, кроме того, что они должны быть выражениями второго порядка, то в качестве решения можно рассматривать соотношение $\varphi_1 = \varphi_2 = f$, так как представление функции в виде $f = (AB + CD)(AB + CD)$ формально полностью удовлетворяет условию задачи. Однако мы не будем ограничиваться такими тривиальными решениями и рассмотрим случай, когда $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Обратимся к рис. 63. На нём изображены три карты Вейча. Слева находится карта для функции *f*. Справа, после знака равенства, — две карты, обозначенные символами φ_1 и φ_2 и соединённые знаком конъюнкции.

1	1		
1	1	1	
	1	1	

f

=

1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	1	
1	1		

φ_1

&

1	1	1	1
1	1	1	1
0	1	1	
0	0		

φ_2

Рис. 63

Выясним, как заполнить карты φ_1 и φ_2. Прежде всего заметим, что все минтермы функции *f* должны входить в обе функции φ_1 и φ_2, поскольку если на каком-либо наборе $f = 1$, то конъюнкция $\varphi_1\varphi_2$ будет равна единице лишь в единственном случае — когда на этом наборе единичное значение примут обе функции: φ_1 и φ_2. Поэтому на обеих правых картах в клетках 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15 ставим единицы. В других клетках карты φ_1 также можно ставить единицы, но при условии, что в тех же клетках карты φ_2 будут записаны нули. Это можно сделать многими способами. В данном случае решено единицы поставить в клетках 8, 9, 10. В этих же клетках карты φ_2 записаны нули.

На карте φ_2 в оставшихся клетках также можно произвольно записывать нули и единицы. Пусть это будут клетки 4, 5, 6. Тогда на карте φ_1 в клетках 4, 5, 6 ставим нули. В клетках 0, 1, 2 обеих карт решено оставить нули. По картам получаем:

$$\varphi_1 = A + CD;$$
$$\varphi_2 = B + CD.$$

В результате искомая форма функции принимает вид

$$f = (A + CD)(B + CD).$$

Пример 2. Функцию

$$f = BCD + A\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}$$

представить в форме вида $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_3$.

Согласно условию имеем

$$\varphi_1\varphi_2 + \varphi_3 = BCD + A\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}.$$

Как и в предыдущем случае, существует много вариантов представления функций φ_1, φ_2, φ_3. Рассмотрим один из них. На рис. 64 приведены четыре карты Вейча, соединённые знаками равенства, конъюнкции и дизъюнкции. Пользуясь заданным условием, заполняем эти карты:

1			1
	1	1	1
1		1	
1	1	1	

f

=

1	×	×	×
	1	1	×
1	×	1	
1	1	1	

φ_1

&

1			×
×	1	1	×
1		1	×
1	1	1	×

φ_2

+

×			1
	×	×	1
×		×	
×	×	×	

φ_3

Рис. 64

1) на левую карту (обозначенную символом *f*) наносим функцию *f*;

2) так как φ_3 — функция не ниже первого порядка, то можно записать (разумеется, возможны и другие варианты):

$$\varphi_3 = \overline{A}B\overline{C};$$

3) поскольку минтермы m_4 и m_5 входят в выражение φ_3, то в конъюнкцию $\varphi_1\varphi_2$ они могут входить, а могут и не входить, т. е. на состояниях 0100 и 0101 значение конъюнкции $\varphi_1\varphi_2$ никто проверять не будет, следовательно, эти состояния являются неопределёнными, поэтому в клетках 4 и 5 карт φ_1 и φ_2 ставим крестики;

4) на карте φ_3 (рис. 64) имеется только два минтерма m_4 и m_5. Чтобы остальные минтермы вошли в функцию *f*, они обязательно должны войти в конъюнкцию $\varphi_1\varphi_2$. Следовательно, на карты φ_1 и φ_2 переписываем единицы с карты *f* (кроме минтермов 4 и 5), а в карте φ_3 на этих же клетках ставим крестики, поскольку на всех наборах, на которых $\varphi_1\varphi_2 = 1$, значение функции φ_3 проверять никто не будет;

5) оставшиеся клетки на картах φ_1 и φ_2 могут заполняться произвольно, но так, чтобы в одной и той же клетке хотя бы на одной карте стоял нуль. Вариант такого заполнения приведён на рис. 64.

Искомые функции имеют вид

$$\varphi_1 = C + A\overline{B} + A\overline{D};$$
$$\varphi_2 = \overline{C} + BD + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B};$$
$$\varphi_3 = \overline{A}B\overline{C}.$$

Если не повышать их порядок, то для функции *f* получим:

$$f = (C + A\overline{B} + A\overline{D})(\overline{C} + BD + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}) + \overline{A}B\overline{C}. \quad (47)$$

Заметим, что исходное выражение имеет 18 вхождений аргументов, в то время как функция (47) — только 15. Если же повысить порядок функций φ_1 и φ_2, то получим выражение, имеющее всего 13 вхождений аргументов:

$$f = [C + A(\overline{B} + \overline{D})][\overline{C} + BD + \overline{B}(\overline{A} + \overline{D})] + \overline{A}B\overline{C}.$$

В общем же случае, когда функцию требуется представить в какой-либо заранее заданной форме высшего порядка, число вхождений аргументов может и возрасти. Например, если функцию $f = A\overline{B}$, представить в форме высшего порядка $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_3\varphi_4$, то число вхождений аргументов будет более двух, каковы бы ни были функции φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 (все не ниже первого порядка).

Упражнения

1. Определите наименьшее число вхождений аргументов, которое будет иметь форма высшего порядка вида:

(ИЧА). $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_3$;

(КУР). $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$;

(МЫС). $f = \varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4\varphi_5)$;

(ДУТ). $f = (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_3)(\varphi_1 + \varphi_4)$.

2. Определите наименьшее число вхождений аргументов, которое может иметь форма высшего порядка, если выражения φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются функциями второго порядка, представленными в ДНФ:

(МИУ). $f = \varphi_1\varphi_2$; (ОУФ). $f = \varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$;

(МЫХ). $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$;

(Х0Ц). $f = \varphi_1 + \varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_4$.

3. Всякая булева функция представима:

1) в совершенной ДНФ; 6) в совершенной КНФ;
2) в сокращённой ДНФ; 7) в сокращённой КНФ;
3) в тупиковой ДНФ; 8) в тупиковой КНФ;
4) в минимальной ДНФ; 9) в минимальной КНФ;
5) в ДНФ; 10) в форме высшего порядка.

Укажите номера тех форм, к которым принадлежат следующие функции:

(ВШН). $f = AB$;	(УМЖ). $f = (A+BC)(\overline{A}+B)$;
(ИЛМ). $f = A+\overline{B}$;	(ИЙС). $f = (A+B)(B+C)$;
(ЕЧ0). $f = A$;	(ШМТ). $f = (A+B)(\overline{A}+B)$;
(УХП). $f = \overline{PQ}$;	(УЮФ). $f = AB+\overline{A}B+A\overline{B}$;
(ИХР). $f = A+\overline{A}B$;	(УЭХ). $f = AB+\overline{A}\,\overline{B}$;
(ЮУК). $f = A+\overline{A}$;	(НЫН). $f = A(B+C)$.

6. СИММЕТРИЧЕСКИЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

6.1. Понятие симметрической функции

В [3, с. 54] симметрические булевы функции отнесены к специальным двоичным функциям наряду с такими, как линейные, монотонные, вырожденные, невырожденные и др. Однако в связи с большой практической значимостью симметрические функции вполне заслуживают того, чтобы их выделить из указанного ряда. Поэтому в данном пособии им посвящена отдельная глава.

Согласно [23, с. 277] булева функция n аргументов называется **симметрической**, если она инвариантна относительно всякой перестановки этих аргументов.

Простейшими примерами симметрических функций являются функции, представленные дизъюнкцией и конъюнкцией неинверсных переменных:

$$f(A,B) = A+B = B+A; \qquad f(A,B) = AB = BA.$$

Если же в дизъюнкцию или конъюнкцию входят как инверсные, так и неинверсные переменные, то такие функции не являются симметрическими. Например, функция $f(A,B,C) = AB\overline{C}$ не является симметрической, так как существуют перестановки аргументов, приводящие к изменению функции. Чтобы показать это, переставим местами переменные B и C: $f_1 = AC\overline{B}$. В результате получилось $f_1 \neq f$, откуда следует, что симметрической функция $f = AB\overline{C}$ не является.

Примером более сложной симметрической функции является выражение вида

$$f = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}. \qquad (48)$$

Чтобы убедиться в симметричности этой функции, достаточно проверить все варианты перестановок: A, C, B; B, A, C; C, A, B; B, C, A; C, B, A. Рассмотрим первый вариант A, C, B. Буква A остаётся без изменений, а вместо буквы B поставим букву C, вместо C — букву B во всех конъюнкциях функции (48). При этом необходимо иметь в виду, что меняются местами только буквы, а операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии остаются на своих местах. Выполнив перестановки, получаем:

$$f = \overline{A}CB + A\overline{C}B + AC\overline{B}.$$

Расположим буквы в алфавитном порядке:

$$f = \overline{A}BC + AB\overline{C} + A\overline{B}C.$$

Получилось выражение, тождественно равное (48).

Рассмотрим второй вариант перестановки B, A, C. Вместо буквы A запишем B, вместо B подставим A, букву C оставим на месте: $f = \overline{B}AC + B\overline{A}C + BA\overline{C}$.

Получилось выражение, тождественно равное функции (48).

Аналогичным образом можно убедиться в том, что и все остальные перестановки аргументов оставляют выражение (48) неизменным.

Упражнения

1. (ТВЕ). Укажите номера функций, являющихся симметрическими:

1) $f = AB\overline{C}$;	4) $f = A\overline{B}+\overline{A}B$;
2) $f = A+B$;	5) $f = A+\overline{A}+B$.
3) $f = \overline{A}+B+C$;	

2. (530). Некоторая функция зависит от 6 аргументов. Чтобы доказать её симметричность, решено проверить все варианты перестановок шести аргументов. Сколько существует таких перестановок?

3. (УДО). Укажите номера симметрических функций:

1) $f = A+\overline{A}+B$;	4) $f = 1$;
2) $f = A\overline{A}+B\overline{C}$;	5) $f = A\overline{B}+AB$;
3) $f = A+BC$;	6) $f = AB+\overline{A}\,\overline{B}$.

6.2. Способы представления симметрических функций

Запишем несколько симметрических функций:

$$f_1(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C};$$

$$f_2(A,B,C,D) = AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD;$$

$$f_3(A,B,C,D,E) = \overline{A}BCDE + A\overline{B}CDE + AB\overline{C}DE + ABC\overline{D}E + ABCD\overline{E}.$$

Нетрудно заметить свойство, общее для всех этих функций, состоящее в том, что число всех минтермов, образующих функцию, равно

$$Q = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где C_n^k — число сочетаний без повторений из n по k;

n — число аргументов функции;

k — число неинверсных аргументов функции.

Например, для функции f_2 имеем:

$$n = 4; \quad k = 2; \quad Q = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Отсюда следует, что функция f_2 принимает единичное значение только в том случае, если единице будут равны точно два любых аргумента.

Ещё одна особенность выражений f_1—f_3 состоит в том, что они не поддаются минимизации (в смысле Квайна). Их ДНФ совпадают с сокращёнными, тупиковыми и минимальными формами, так как все минтермы одновременно являются и простыми импликантами. Этим обусловлены трудности представления симметрических функций. Как, например, записать функцию, принимающую единичное значение всякий раз, когда значение единицы принимают только четыре аргумента из восьми? Аналитическая запись такой функции содержит 70 минтермов, по 8 аргументов каждый, т. е. является громоздкой и совершенно необозримой. Чтобы избавиться от этих трудностей, для симметрических функций введена сокращённая запись. В [23] симметрические функции обозначаются символом $S_k(n)$, где n — число аргументов, от которых зависит функция; k — число аргументов, равных единице, при которых функция принимает единичное значение. Например, вышеприведённые три функции через S-символы представятся в виде:

$$f_1(A,B,C) = S_1(3); \qquad f_2(A,B,C,D) = S_2(4);$$

$$f_3(A,B,C,D,E) = S_4(5).$$

По сокращённой записи легко найти развёрнутое аналитическое выражение симметрической функции. Например, функция $S_3(5)$ состоит из 10 пятибуквенных минтермов, в каждом из которых точно 3 неинверсных аргумента:

$$S_3(5) = ABC\overline{D}\,\overline{E} + AB\overline{C}D\overline{E} + A\overline{B}CD\overline{E} + \overline{A}BCD\overline{E} + ABC\,\overline{C}\,\overline{D}E +$$
$$+ A\overline{B}C\overline{D}E + \overline{A}BC\overline{D}E + A\overline{B}\,\overline{C}DE + \overline{A}B\overline{C}DE + \overline{A}\,\overline{B}CDE.$$

Таким образом, симметрические функции можно задавать двумя способами: сокращённым и развёрнутым аналитическим.

Нижний индекс в сокращённой записи симметрической функции, согласно [23], называется ***а*-числом**. Очевидно, что *а*-число может быть равным $0, 1, 2, \ldots, n$, откуда следует, что всего существует $n + 1$ симметрических функций с одиночным *а*-числом. Если $n = 0$, то имеется только одна симметрическая функция с *а*-числом, равным нулю. Это $S_0(0) = 0$. Если $n = 1$, то имеем две функции $S_0(A) = \overline{A}$; $S_1(A) = A$ с *а*-числами, равными соответственно 0 и 1.

Если $n = 2$, то

$$S_0(A, B) = \overline{A}\,\overline{B};$$
$$S_1(A, B) = \overline{A}B + A\overline{B};$$
$$S_2(A, B) = AB,$$

где *а*-числа равны соответственно 0, 1, 2.

Если $n = 3$, то *а*-числа равны 0, 1, 2, 3:

$$S_0(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$
$$S_1(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C};$$
$$S_2(A, B, C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C};$$
$$S_3(A, B, C) = ABC.$$

Упражнения

1. Найдите числа n и k для симметрических функций:

(ФА6). $f = A\overline{B} + \overline{A}B$;

(ФОК). $f = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$;

(ВЛЯ). $f = ABCD$;

(АЗП). $f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$.

2. Укажите номера минтермов следующих симметрических функций:

(756). $S_0(4)$; (ЕЙС). $S_2(4)$;

(ЕНЫ). $S_1(3)$; (ЛЫТ). $S_3(4)$.

3. Какие номера минтермов необходимо включить в функцию, чтобы она стала симметрической?

(ЗАЖ). $S_2(A, B, C, D) = \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + \ldots$

(ДЕД). $S_3(A, B, C, D) = ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + \ldots$

(596). $S_2(A, B, C, D, E) = \overline{A}B\overline{C}D\overline{E} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}E + A\overline{B}C\overline{D}\,\overline{E} + \ldots$

4. Найдите число минтермов, содержащихся в симметрических функциях вида:

(ЗИФ). $S_6(8)$; (221). $S_0(12)$;

(МУ0). $S_{10}(11)$; (ВЦ5). $S_{10}(10)$;

(ГАВ). $S_3(10)$; (КЦЛ). $S_5(8)$.

5. Найдите число вхождений аргументов функций:

(МУР). $S_3(4)$; (ЛБС). $S_1(8)$;

(ЗЕМ). $S_2(8)$; (МЯН). $S_0(7)$;

(ОЛК). $S_2(10)$; (ТКС). $S_3(3)$.

6. Найдите наименьшие значения x, если задано Q — число минтермов симметрической функции:

(350). $S_x(5)$, $Q = 10$; (ЭЭП). $S_3(x)$, $Q = 20$;

(370). $S_x(8)$, $Q = 56$; (ПР0). $S_4(x)$, $Q = 70$.

7. Найдите *а*-числа симметрических функций:

(АЛ0)! $f_1 = ABCD$; $f_2 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

(М0Ю)! $f_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$; $f_2 = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$.

6.3. Операции над симметрическими функциями

Над симметрическими функциями можно выполнять операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии.

Если две симметрические функции с *а*-числами k_1 и k_2 зависят от одних и тех же аргументов, то их дизъюнкцией является симметрическая функция, содержащая два *а*-числа k_1 и k_2. Например:

$$f_1 = S_1(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C};$$
$$f_2 = S_2(A, B, C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C};$$
$$f_1 + f_2 = S_1(A, B, C) + S_2(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} +$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}.$$

Симметрические функции с несколькими *а*-числами во многих случаях поддаются минимизации в смысле Квайна. В данном случае имеем две минимальные ДНФ и одну минимальную КНФ:

$$f_1 + f_2 = A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B = B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C =$$
$$= (A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}),$$

которые содержат по шесть вхождений аргументов, в то время как до минимизации было по 18 букв.

Чтобы достичь ясности в вопросах минимизации симметрических функций, рассмотрим все функции четырёх аргументов с одиночными *а*-числами:

$$S_0(4) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D};$$
$$S_1(4) = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D;$$
$$S_2(4) = \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D +$$
$$+ A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D};$$
$$S_3(4) = \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}D + ABC\overline{D};$$
$$S_4(4) = ABCD.$$

Нанесём эти функции на карту Вейча (рис. 65), обозначая их *а*-числами. По карте видно, что дизъюнкция двух симметрических функций минимизируется только в том случае, если их *а*-числа в натуральном ряду являются соседними. Рассмотрим, например, функции $S_3(4)$ и $S_4(4)$. На карте Вейча их дизъюнкция представлена цифрами 3 и 4. Мысленно заменив их единицами, а все остальные цифры — нулями, получим минимальную ДНФ:

2	3	2	1
3	4	3	2
2	3	2	1
1	2	1	0

Рис. 65

$$S_3(4) + S_4(4) = S_{3,4}(4) = ABC + ABD + ACD + BCD.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть M — множество минтермов, образующих первую симметрическую функцию с одиночным *а*-числом, N — множество минтермов, образующих вторую симметрическую функцию также с одиночным *а*-числом. Склеивающихся минтермов в множестве M нет. Их нет и в множестве N. Если раз- ность *а*-чисел первой и второй функций превышает единицу, то ни один минтерм множества M не склеивается ни с одним минтермом множества N, так как они отличаются инверсиями двух и более аргументов.

Если же разность a-чисел первой и второй функций равна единице и обе функции зависят от одних и тех же аргументов, то в множестве M всегда найдутся минтермы, склеивающиеся с минтермами множества N.

Таким образом, дизъюнкция двух симметрических функций с одиночными a-числами, зависящих от одних и тех же аргументов, минимизируется, если разность их a-чисел равна единице. Если же разность a-чисел превышает единицу, то дизъюнкция этих функций не поддаётся минимизации.

Конъюнкция двух симметрических функций с различными одиночными a-числами тождественно равна нулю. Это следует из того, что множества M и N не пересекаются. Например:

$$S_1(A,B,C)\cdot S_2(A,B,C)=(\bar A\,\bar B C+\bar A B\bar C+A\bar B\,\bar C)(\bar A BC+A\bar B C+AB\bar C)=\bar A\,\bar B C\cdot\bar A BC+\bar A\,\bar B C\cdot A\bar B C+\bar A\,\bar B C\cdot AB\bar C+\bar A B\bar C\cdot\bar A BC+\bar A B\bar C\cdot A\bar B C+\bar A B\bar C\cdot AB\bar C+A\bar B\,\bar C+\bar A BC+A\bar B\,\bar C\cdot A\bar B C+A\bar B\,\bar C\cdot AB\bar C=0.$$

В общем случае конъюнкция двух симметрических функций есть симметрическая функция с a-числами, являющимися общими для обеих функций. Например:

$$S_{1,2,3}(A,B,C,D)\cdot S_{2,3,4}(A,B,C,D)=S_{2,3}(A,B,C,D).$$

Инверсия симметрической функции f, зависящей от n аргументов, есть симметрическая функция с a-числами, не входящими в функцию f, но являющимися элементами множества всех возможных a-чисел симметрической функции n аргументов. Например:

$$\bar S_{0,1,2}(A,B,C,D)=S_{3,4}(A,B,C,D).$$

В данном случае $W=\{0,1,2,3,4\}$. Инвертируемая функция содержит a-числа 0, 1, 2, а её инверсия — 3, 4.

Упражнения

1. Найдите a-числа функций (все функции зависят от одних и тех же аргументов):

(ТЭР). $f_1=S_0(A,B,C,D)+S_{1,2}(A,B,C,D)+S_{1,2,4}(A,B,C,D)$;

(0ЕС). $f_2=S_1(4)+S_{2,3}(4)+S_{2,3,4}(4)$;

(П0Н). $f_3=S_5(7)+S_{5,6,7}(7)+S_0(7)$.

2. Укажите номера функций, которые могут быть минимизированы. Все функции зависят от одних и тех же восьми аргументов.

(ЖНИ).	(Р50).	(Л00).
1) $S_{1,3,4,7}$;	1) $S_{0,1,5}$;	1) $S_{1,3,4,7}$;
2) $S_{0,2,5,6}$;	2) $S_{1,3,8}$;	2) $S_{2,5,7}$;
3) $S_{0,3,6,7}$;	3) $S_{2,7,8}$;	3) $S_{1,6,7}$;
4) $S_{1,2,4,6,8}$;	4) $S_{1,2,3,7,8}$;	4) $S_{2,6,8}$;
5) $S_{1,3,5,7}$;	5) $S_{2,4,6,8}$;	5) $S_{4,5,7}$;
6) $S_{0,8}$.	6) $S_{0,4,8}$.	6) $S_{4,5,6,7,8}$.

3. Сколько вхождений аргументов имеют минимальные ДНФ следующих функций?

(ЯМУ). $S_{1,3}(4)$. (ЛИС). $S_{0,1,2,3,4}(4)$.

(204). $S_{2,3,4}(4)$. (МАУ). $S_{1,2,3,4}(4)$.

(ШУТ). $S_{0,1,2,3}(4)$. (ШАВ). $S_0(4)$.

4. Сколько вхождений аргументов имеют минимальные КНФ следующих функций?

(0МС). $S_{2,3}(4)$. (ПАФ). $S_{1,4}(4)$.

(ЧЕШ). $S_0(4)$. (УУТ). $S_{2,3,4}(4)$.

(НУЗ). $S_4(4)$. (ЛАС). $S_{0,4}(4)$.

5. Найдите номера минтермов следующих функций, зависящих от четырёх аргументов:

(БЗП). $S_{2,3}$; (КЭБ). $S_{0,1,4}$; (ММШ). $S_{0,1,4}\cdot S_{2,3,4}$;

(0ЛУ). $S_{0,1,2,3,4}\cdot S_{1,2,3,4}\cdot S_{1,2,3}$; (ШИК). $S_{1,4}\cdot S_{1,2,3}\cdot S_{0,1,2}$.

6. Найдите номера минтермов следующих функций, зависящих от четырёх аргументов:

(УФО). $\bar S_{1,2,4}$; (ОИК). $\overline{S_{1,2}+S_{1,3}}+S_1+\bar S_{0,2,3,4}$;

(ХАУ). $\bar S_{0,1,2}$; (ВТМ). $\bar S_3$; (ЭКБ). $\overline{S_{2,3,4}\cdot S_{1,2,3,4}}+S_0$.

6.4. Разложение симметрических функций для ДНФ

Пусть a-число симметрической функции n переменных равно k. Тогда по теореме разложения получаем:

$$S_k(A_1,A_2,\ldots,A_n)=A_1\cdot S_{k-1}(A_2,\ldots,A_n)+\bar A_1\cdot S_k(A_2,\ldots,A_n),$$

т. е. при разложении симметрической функции по одному аргументу получаются две симметрические функции: $S_{k-1}(A_2,\ldots,A_n)$ и $S_k(A_2,\ldots,A_n)$. Первая из них содержит a-число на единицу меньше исходной и обе зависят от $n-1$ аргументов. Разложим, например, функцию $S_2(A,B,C,D)$ по аргументу A:

$$S_2(A,B,C,D)=A\cdot S_1(B,C,D)+\bar A\cdot S_2(B,C,D). \qquad (49)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого выражения, запишем функцию $S_2(A,B,C,D)$ в развёрнутом виде:

$$S_2(A,B,C,D)=AB\bar C\,\bar D+A\bar B C\bar D+\bar A BC\bar D+A\bar B\bar C D+\bar A B\bar C D+\bar A\bar B CD.$$

Вынесем за скобки переменные A и $\bar A$:

$$S_2(A,B,C,D)=A(B\bar C\,\bar D+\bar B C\bar D+\bar B\,\bar C D)+\bar A(BC\bar D+B\bar C D+\bar B CD).$$

Очевидно, что скобочные выражения являются симметрическими функциями:

$$B\bar C\,\bar D+\bar B C\bar D+\bar B\,\bar C D=S_1(B,C,D);$$
$$BC\bar D+B\bar C D+\bar B CD=S_2(B,C,D).$$

Умножим первое из них на A, а второе — на $\bar A$ и объединим знаком дизъюнкции, тогда получим выражение (49).

Таким образом, разложение симметрической функции с одиночным a-числом по какой-либо переменной совпадает с операцией вынесения этой переменной за скобки.

Продолжим разложение по переменной B:

$$\begin{aligned}S_2(A,B,C,D)&=A[B\cdot S_0(C,D)+\bar B\cdot S_1(C,D)]+\\&+\bar A[B\cdot S_1(C,D)+\bar B\cdot S_2(C,D)]=\\&=ABS_0(C,D)+A\bar B S_1(C,D)+\\&+\bar A BS_1(C,D)+\bar A\,\bar B S_2(C,D).\end{aligned} \qquad (50)$$

Каждую из функций S_0, S_1, S_2 разложим по переменным C и D:

$$S_0(C,D)=\bar C\,\bar D;$$
$$S_1(C,D)=C\cdot S_0(D)+\bar C S_1(D)=C\bar D+\bar C D;$$
$$S_2(C,D)=CD.$$

Подставив эти выражения в (50), получаем окончательно:

$$S_2(A,B,C,D)=AB\bar C\,\bar D+A\bar B C\bar D+A\bar B\,\bar C D+\bar A BC\bar D+\bar A B\bar C D+\bar A\,\bar B CD.$$

Если симметрическая функция содержит несколько a-чисел, то разложение её осуществляется точно так же, если сначала функцию представить в виде дизъюнкции симметрических функций с одиночными *а*-числами. Например:

$$S_{1,2,5}(A,B,C,D,E) = S_1(A,B,C,D,E) + S_2(A,B,C,D,E) + \\ + S_5(A,B,C,D,E).$$

Упражнения

1. (ДКН). В выражении $S_2(A,B,C,D,E)$ вынесите за скобки переменную *С*. В устройство введите *а*-число и все переменные, от которых зависит находящаяся в скобках симметрическая функция.

2. (ППТ). В выражении $S_2(A,B,C,D,E)$ вынесите за скобки переменную $\overline{C}$. В устройство введите *а*-число и все переменные, от которых зависит находящаяся в скобках симметрическая функция.

3. (МБМ). Введите в устройство *а*-числа: *x*, *y*, *z*, *v*, если известно, что в результате разложения по переменным *А* и *В* симметрической функции $S_3(A,B,C,D,E)$ получилось выражение:

$$S_3(A,B,C,D,E) = ABS_x + A\overline{B}S_y + \overline{A}BS_z + \overline{A}\,\overline{B}S_v.$$

4. (ОЯР). Некоторую симметрическую функцию *f* разложили по переменной *С*. В результате получилось выражение вида $f = CS_2(B,D,E,F) + \overline{C}S_3(B,D,E,F)$.

Найдите *а*-число исходной функции *f* и перечислите все её аргументы (в алфавитном порядке).

5. (ДАН). В результате разложения по переменной *Q* симметрической функции *f* получилось выражение:

$$f = QS_4(P,R,S,T).$$

Найдите *а*-число исходной функции *f* и перечислите все её аргументы.

6. (НУН). Симметрическую функцию *f* разложили по аргументу *С*, в результате чего получилось выражение:

$$f = \overline{C}S_0(D,E,F).$$

Найдите *а*-число исходной функции *f* и перечислите все её аргументы.

7. (РПУ). Симметрическую функцию *f* разложили по переменной *D*, в результате чего получилось выражение:

$$f = \overline{D}S_0(C,E,F) + DS_3(C,E,F).$$

Найдите *а*-числа исходной функции *f* и перечислите все её аргументы.

6.5. Разложение симметрических функций для КНФ

Пусть *а*-число симметрической функции *n* аргументов равно *k*. Тогда

$$S_k(A_1,A_2,\ldots,A_n) = [A_1 + S_k(A_2,\ldots,A_n)]\ \& \\ \&\ [\overline{A}_1 + S_{k-1}(A_2,\ldots,A_n)].$$

Чтобы убедиться в справедливости этого выражения, раскроем квадратные скобки:

$$S_k(A_1,A_2,\ldots,A_n) = A_1S_{k-1}(A_2,\ldots,A_n) + \\ + \overline{A}_1S_k(A_2,\ldots,A_n).$$

Получилось выражение, приведённое в начале предыдущего подраздела.

Для примера рассмотрим функцию $S_2(A,B,C,D)$. Разложим её по аргументу *А*:

$$S_2(A,B,C,D) = [A + S_2(B,C,D)][\overline{A} + S_1(B,C,D)].$$

Полученный результат разложим по аргументу *В* (отдельно преобразуем каждую квадратную скобку):

$$S_2(A,B,C,D) = [B + A + S_2(C,D)][\overline{B} + A + S_1(C,D)]\ \& \\ \&\ [B + \overline{A} + S_1(C,D)][\overline{B} + \overline{A} + S_0(C,D)]. \qquad (51)$$

Выражения, находящиеся в скобках, разложим по переменным *С* и *D*:

$$B + A + S_2(C,D) = [C + B + A][\overline{C} + B + A + S_1(D)] =$$
$$= (A + B + C)(A + B + \overline{C} + D) = (A + B + C + \overline{D})(A + B +$$
$$+ C + D)(A + B + \overline{C} + D);$$
$$\overline{B} + A + S_1(C,D) = [C + \overline{B} + A + S_1(D)][\overline{C} + \overline{B} + A + S_0(D)] =$$
$$= (A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D});$$
$$B + \overline{A} + S_1(C,D) = [C + B + \overline{A} + S_1(D)][\overline{C} + B + \overline{A} + S_0(D)] =$$
$$= (\overline{A} + B + C + D)(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D});$$
$$\overline{B} + \overline{A} + S_0(C,D) = (C + \overline{B} + \overline{A} + \overline{D})(\overline{C} + \overline{B} + \overline{A}) =$$
$$= (\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}).$$

Подставим найденные выражения в (51):

$$S_2(A,B,C,D) = (A + B + C + \overline{D})(A + B + C + D)\ \&$$
$$\&\ (A + B + \overline{C} + D)(A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})\ \&$$
$$\&\ (\overline{A} + B + C + D)(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})\ \&$$
$$\&\ (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}).$$

В результате получили полное разложение по всем переменным симметрической функции $S_2(A,B,C,D)$.

Упражнения

1. (ЛТН). Дано разложение по аргументу *А*:

$$S_2(A,B,C) = [A + S_x(\ldots)][\overline{A} + S_y(\ldots)].$$

Найдите числа *x* и *y*; вместо точек поставьте буквы.

2. (МТ0). В результате разложения по аргументу *А* получилось выражение $[A + S_0(B,C)]\overline{A}$. Найдите *а*-число исходной функции и перечислите её аргументы.

3. (УЛВ). В результате разложения симметрической функции по переменной *А* получилось выражение:

$$[A + S_2(B,C)][\overline{A} + S_1(B,C)].$$

Разложите его по всем остальным аргументам и номера макстермов введите в устройство (по возрастанию).

4. (ОЛБ). В результате разложения симметрической функции по переменным *А* и *В* получилось выражение

$$[A + B + S_2(C,D)][A + \overline{B} + S_1(C,D)]\ \& \\ \&\ [\overline{A} + B + S_1(C,D)][\overline{A} + \overline{B} + S_0(C,D)].$$

Разложите функцию по переменным *С* и *D*. Номера макстермов введите в устройство (в порядке возрастания). (512). Найдите *а*-число и перечислите аргументы, от которых зависит исходная симметрическая функция.

5. (ЦПИ). Найдите *а*-числа и перечислите аргументы симметрической функции, представленной в виде

$$S = [A + S_{1,2}(B,C)][\overline{A} + S_{0,1}(B,C)].$$

6.6. Общий случай симметрии функций

До сих пор мы рассматривали функции с симметрией относительно неинверсных переменных. Это частный случай. В общем случае любые переменные, относительно которых функция является симметрической, могут быть инверсными. Рассмотрим, например, функцию с симметрией относительно неинверсных переменных:

$$S_3(A,B,C,D) = \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}D + ABC\overline{D}. \qquad (52)$$

Выясним, какой вид примет аналитическое выражение функции, если, например, переменные *В* и *С* принять инверсными. Для этого над всеми буквами *В* и *С* в обеих частях выражения (52) поставим знаки отрицания:

$$S_3(A,\overline{B},\overline{C},D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{\overline{B}}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{\overline{C}}D + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} =$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}. \qquad (53)$$

Получилось выражение, не равное (52). Это совершенно новая симметрическая функция с симметрией относительно переменных A, $\overline{B}$, $\overline{C}$, D. Симметричность её можно установить путём перестановки аргументов. Выберем, например, следующий вариант замены переменных: D, A, B, C, т. е. вместо A запишем D, вместо B — A, вместо C — B, вместо D — C. Заметим, что перестановка осуществляется в формуле (52), а не в (53), т. е. в той функции, которая симметрична относительно неинверсных переменных:

$$S_3(A,B,C,D) = \overline{D}ABC + D\overline{A}BC + DA\overline{B}C + DAB\overline{C}.$$

После этого в левой и правой частях выражения ставим знаки инверсии над всеми буквами B и C:

$$S_3(A,B,C,D) = \overline{D}A\overline{B}\,\overline{C} + D\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + DA\overline{\overline{B}}\,\overline{C} + DA\overline{B}\,\overline{\overline{C}} =$$
$$= A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD.$$

В результате получилось выражение, тождественно равное (53). Аналогичным образом можно убедиться в неизменности функции (53) при всех других перестановках переменных.

Упражнения

1. (КЛТ). На основе функции $S_2(A,B,C)$ найдите функцию $S_2(A,\overline{B},C)$. В устройство введите число инверсных и число неинверсных переменных.

2. (ГЛО). Найдите минимальную ДНФ функции $S_{3,4}(\overline{A},B,C,\overline{D})$. В устройство введите число инверсных и число неинверсных переменных.

3. (АЛБ). Введите в устройство аналитическое выражение функции $\overline{S}_{0,1,2}(B,\overline{C},\overline{D})$.

4. (С0С). Сколько инверсных и сколько неинверсных переменных содержится в аналитической записи функции $S_{1,4}(\overline{A},B,C,D)$?

7. ЧИСЛОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. Понятие изображающего числа булевой функции

В предыдущих разделах были описаны следующие способы представления булевых функций: аналитический, табличный, матричный (карты Вейча), в виде набора номеров минтермов и графический (при помощи граф-схем). Рассмотрим ещё один способ — числовой.

Пусть дана некоторая функция трёх аргументов, например:

$$f = A\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C}. \qquad (54)$$

Представим её в виде набора номеров минтермов:

$$f = (0,3,4,5,7).$$

Всего существует восемь минтермов трёх аргументов. Расположим их в один ряд, начиная с m_0, и единицами отметим минтермы, входящие в заданную функцию, а остальные минтермы обозначим нулями:

$$\begin{matrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Единицы и нули образуют восьмизначное двоичное число, которое называют **изображающим числом** функции f и обозначают знаком # [15]:

$$\#(A\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C}) = 1001 \quad 1101.$$

Если функция (54) зависит от четырёх аргументов, то изображающее число представится в виде

$$\begin{matrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\#(A\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C}) = 1100 \quad 0011 \quad 1111 \quad 0011.$$

Таким образом, одна и та же функция может быть представлена различными изображающими числами в зависимости от **базиса**, т. е. от числа аргументов (в [15] под базисом понимается таблица, содержащая все возможные наборы значений аргументов).

В связи с неоднозначностью представления функции в виде изображающих чисел необходимо ввести понятие **минимального базиса** (МБ). Базис является минимальным, если данная булева функция существенно зависит от всех его переменных. Для определения МБ достаточно найти какую-либо из минимальных ДНФ (либо КНФ). Все входящие в неё аргументы будут являться переменными, от которых функция существенно зависит. Например, базис (A, B, C, D) для функции

$$f = A\overline{C} + \overline{A}C + AB\overline{D} + BCD$$

не является минимальным. Найдём минимальную ДНФ данной функции:

$$f = A\overline{C} + \overline{A}C + AB.$$

В полученном выражении нет аргумента D. Следовательно, эта функция имеет минимальный базис (A, B, C).

Изображающее число можно рассматривать как частный случай матричного представления булевой функции, как особый вид карты Вейча с линейным расположением минтермов. На рис. 66 приведена карта четырёх переменных, в клетках которой записаны номера соответствующих минтермов, а на рис. 67 изображена та же карта, но вместо номеров минтермов на ней указаны единицы функции (54) точно так же, как и в случае обычных карт Вейча, описанных в подразделе 2.6. Так как карта имеет только один ряд клеток, то однозначность представления функции не нарушится, если оставить только единицы и нули, а всё остальное — буквы, линии, клетки — удалить. В результате получим изображающее число.

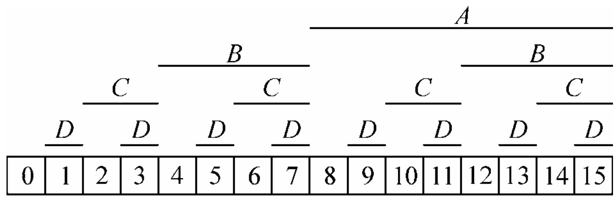


Рис. 66

1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Рис. 67

Приведем ещё несколько примеров изображающих чисел для базиса A, B, C, D.

$$\#(A+B) = 0000 \quad 1111 \quad 1111 \quad 1111;$$
$$\#(A) = 0000 \quad 0000 \quad 1111 \quad 1111;$$
$$\#(AB) = 0000 \quad 0000 \quad 0000 \quad 1111;$$
$$\#(\overline{B}) = 1111 \quad 0000 \quad 1111 \quad 0000.$$

Упражнения

1. Относительно базиса (A, B, C) найдите изображающие числа функций:

(КБМ). $\#(A\overline{B} + C)$; (ЛОС). $\#(A + BC)$;

(МУН). $\#(\overline{B})$; (ЮАР). $\#(S_{2,3})$;

(ННК). $\#(C)$; (ЛАТ). $\#(S_0)$.

2. Относительно базиса (A, B) найдите изображающие числа функций:

(СБО). $\#(A+B)$; (721). $\#(S_2)$;

(АГИ). $\#(A\overline{B})$; (РМУ). $\#(B\overline{B})$;

(ППА). $\#(A+\overline{A})$; (ОКО). $\#(\overline{A})$.

3. Найдите минимальный базис функций (вводить только буквы в алфавитном порядке):

(АТФ). $f = CD+\overline{C}\,\overline{D}+ABC+\overline{A}B\overline{D}$;

(УКК). $f = AB+\overline{A}D+BCD$;

(751). $f = PQ+\overline{Q}R+PRS$.

4. Найдите изображающие числа (макстермы и минтермы зависят от трёх аргументов):

(ПЗМ). m_3; (ЦПП). m_5; (ЛИР). m_0;
(ЗЭС). m_7; (ВВО). M_0; (ФОТ). M_3;
(ВАТ). M_2; (ВАК). M_4; (231). M_7.

5. Относительно базиса (A, B, C) найдите изображающие числа функций:

(ТЫФ). $f = A$; (НЕЧ). $f = C$; (ОУШ). $f = \overline{B}$;
(ЛБ2). $f = B$; (ЖБИ). $f = \overline{A}$; (ВВК). $f = \overline{C}$.

7.2. Операции над изображающими числами

Рассмотрим три операции над изображающими числами: дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию.

Чтобы найти изображающее число дизъюнкции двух функций, необходимо сначала выровнять их базисы, а затем поразрядно сложить без переноса в старшие разряды по правилам: $0+0=0$; $1+0=1$; $0+1=1$; $1+1=1$.

Если базисы двух функций f_1 и f_2 совпадают, то

$$\#(f_1+f_2) = \# f_1 + \# f_2.$$

Рассмотрим, например, две функции вида

$$f_1 = A+D+\overline{B}C; \qquad (55)$$

$$f_2 = A+B\overline{C}. \qquad (56)$$

Базис первой функции — (A, B, C, D), второй — (A, B, C). Общим базисом для обеих функций можно считать набор аргументов (A, B, C, D). Тогда

$$\#(A+D+\overline{B}C) = 0111\quad 0101\quad 1111\quad 1111;$$

$$\#(A+B\overline{C}) = 0000\quad 1100\quad 1111\quad 1111.$$

Изображающее число дизъюнкции функций (55) и (56) имеет вид

$$\#(f_1+f_2) = 0111\quad 1101\quad 1111\quad 1111.$$

Дизъюнкция функций также является функцией. Следовательно, к ней применимо понятие минимального базиса. В некоторых случаях для нахождения МБ дизъюнкции двух функций f_1 и f_2, не имеющих общих аргументов, достаточно знать МБ функций f_1 и f_2. В МБ дизъюнкции f_1+f_2 полностью войдёт минимальный базис функции f_1 и все переменные МБ функции f_2.

Рассмотрим пример. Пусть даны две функции с минимальными базисами:

$$f_1 = AB;$$
$$f_2 = C.$$

Тогда минимальный базис дизъюнкции этих функций примет вид (A, B, C). Относительно данного базиса найдём изображающее число функции f_1+f_2:

$$\begin{aligned}\#(AB) &= 0000\quad 0011\\ \#(C) &= \underline{0101\quad 0101}\\ \#(AB+C) &= 0101\quad 0111\end{aligned}$$

В общем случае минимальный базис дизъюнкции функций может насчитывать и меньшее число переменных. Например, функции

$$f_1 = A\overline{D}+\overline{A}B; \qquad f_2 = AD+AC$$

имеют минимальные базисы соответственно (A, B, D) и (A, C, D), в то время как минимальный базис их дизъюнкции состоит из двух переменных A и B:

$$f_1+f_2 = A\overline{D}+\overline{A}B+AD+AC = A+B.$$

Следовательно, изображающее число функции f_1+f_2 можно записать не только в виде

$$\#(f_1+f_2) = 0000\quad 1111\quad 1111\quad 1111,$$

но и с учётом того, что её минимальный базис содержит меньшее число переменных:

$$\#(f_1+f_2) = 0111.$$

Изображающее число дизъюнкции n функций имеет вид

$$\#(f_1+f_2+\ldots+f_n) = \# f_1 + \# f_2 + \ldots + \# f_n,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — функции, зависящие от одних и тех же аргументов.

Чтобы найти изображающее число конъюнкции функций f_1 и f_2, необходимо выровнять их базисы и поразрядно перемножить числа по правилам (5)—(8):

$$0\cdot 0=0;\quad 0\cdot 1=0;\quad 1\cdot 0=0;\quad 1\cdot 1=1.$$

Найдём, например, изображающее число конъюнкции функций

$$f_1 = B\overline{C}+D; \qquad f_2 = A\overline{B}+C.$$

Для нахождения изображающих чисел конъюнкции этих функций можно взять базис (A, B, C, D). Тогда

$$\begin{aligned}\#(B\overline{C}+D) &= 0101\quad 1101\quad 0101\quad 1101\\ \#(A\overline{B}+C) &= \underline{0011\quad 0011\quad 1111\quad 0011}\\ \#(f_1\cdot f_2) &= 0001\quad 0001\quad 0101\quad 0001\end{aligned}$$

В общем случае изображающее число конъюнкции n функций имеет вид:

$$\#(f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdots f_n) = \# f_1\cdot \# f_2\cdot \# f_3\cdots \# f_n,$$

где функции $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ зависят от одних и тех же аргументов.

Чтобы найти изображающее число инверсии заданной функции f, достаточно заменить в этом числе нули на единицы и единицы на нули. Например:

$$\#(A+B\overline{C}) = 0010\quad 1111;$$

$$\#(\overline{A+B\overline{C}}) = 1101\quad 0000.$$

Упражнения

1. Относительно минимального базиса найдите изображающие числа дизъюнкции функций.

(НБО). $f_1 = BC+AC$; $f_2 = BC+\overline{A}C$.

(ЯВА). $f_1 = (A+B)C$; $f_2 = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

(АТЛ). $f_1 = A$; $f_2 = C+AB$.

2. Найдите изображающие числа конъюнкции функций (для минимального базиса).

(ЛББ). $f_1 = A+B$; $f_2 = B+C$.

(МВМ). $f_1 = PQ+R$; $f_2 = \overline{Q}+\overline{R}$.

(КЛВ). $f_1 = X+Y$; $f_2 = Z+X\overline{Y}$.

3. Найдите минимальный базис дизъюнкции функций (в устройство вводить только буквы в алфавитном порядке без запятых).

(ЯШЕ). $f_1 = CE+\overline{C}\,\overline{E}+DEF+\overline{C}D\overline{F}+\overline{C}\,\overline{D}$;
$f_2 = E\overline{K}+\overline{E}K+FK\overline{L}+EFL+E\overline{F}K$.

(МАУ). $f_1 = PQ+\overline{Q}R+PRS$;
$f_2 = AB\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+\overline{A}\,\overline{B}D+A\overline{B}C$.

4. Найдите изображающие числа инверсий функций.

(ОЛК). $f = A\overline{C} + BC$; (57Т). $f = BC + \overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C}$;

(УЛБ). $f = (A+B)(A+C)$; (65С). $f = A(B+C) + \overline{A}\,\overline{C}$.

5. Найдите изображающие числа конъюнкции следующих функций.

(ЗЗБ).	(МТФ).	(АИО).
$f_1 = (\overline{A}+B)C$;	$f_1 = PQ + R$;	$f_1 = C + D + E$;
$f_2 = AB$;	$f_2 = RS + P$;	$f_2 = B + \overline{C} + E$;
$f_3 = A + \overline{B} + C$.	$f_3 = PQ + \overline{R}$.	$f_3 = BE + \overline{C}$.

6. Найдите минимальный базис функций (указать буквы без запятых):

(ЛАП). $f = f_1 f_2 + f_3$; (АЗН). $f = f_1 \bar{f}_1 + f_2 + f_3$;

(РАД). $f = f_1 + \bar{f}_1 f_3$; (КВ2). $f = f_1(f_2 + f_3 + \bar{f}_2 \bar{f}_3)$;

(ШИМ). $f = (f_1 + f_2) f_3$; (ЛКЛ). $f = (f_1 + f_1 f_2)\bar{f}_3$,

если $f_1 = (A+B)\overline{B}$; $f_2 = B + C + D$; $f_3 = C + D$.

7.3. Изображающие числа функций высших порядков

Для нахождения изображающих чисел функции, представленной в какой-либо из форм высших порядков, нет необходимости выполнять алгебраические преобразования, чтобы найти СДНФ. Вместо алгебраических преобразований достаточно выполнить несложные операции над изображающими числами отдельных аргументов. Проиллюстрируем это на следующем примере:

$$f = \overline{A[B + \overline{C(D + \overline{A}C)}]} + B\overline{C}.$$

Так как функция зависит от четырёх аргументов, то

$$\begin{array}{llll}
\#A = & 0000\ \ 0000\ \ 1111\ \ 1111 \\
\#B = & 0000\ \ 1111\ \ 0000\ \ 1111 \\
\#C = & 0011\ \ 0011\ \ 0011\ \ 0011 \\
\#D = & 0101\ \ 0101\ \ 0101\ \ 0101 \\
\#\overline{A} = & 1111\ \ 1111\ \ 0000\ \ 0000 \\
\#\overline{C} = & 1100\ \ 1100\ \ 1100\ \ 1100
\end{array}$$

Находим изображающее число конъюнкции $\overline{A}C$:

$$\begin{array}{rl}
 & 1111\ \ 1111\ \ 0000\ \ 0000 \\
\& & \underline{0011\ \ 0011\ \ 0011\ \ 0011} \\
 & 0011\ \ 0011\ \ 0000\ \ 0000
\end{array}$$

Полученный результат используем для нахождения изображающего числа выражения $D + \overline{A}C$:

$$\begin{array}{rl}
 & 0101\ \ 0101\ \ 0101\ \ 0101 \\
+ & \underline{0011\ \ 0011\ \ 0000\ \ 0000} \\
 & 0111\ \ 0111\ \ 0101\ \ 0101
\end{array}$$

После умножения на C получаем:

$$\begin{array}{rl}
 & 0011\ \ 0011\ \ 0011\ \ 0011 \\
\& & \underline{0111\ \ 0111\ \ 0101\ \ 0101} \\
 & 0011\ \ 0011\ \ 0001\ \ 0001
\end{array}$$

Инвертируем полученный результат:

$$1100\ \ 1100\ \ 1110\ \ 1110.$$

Находим изображающее число дизъюнкции B и предыдущего результата:

$$\begin{array}{rl}
 & 0000\ \ 1111\ \ 0000\ \ 1111 \\
+ & \underline{1100\ \ 1100\ \ 1110\ \ 1110} \\
 & 1100\ \ 1111\ \ 1110\ \ 1111
\end{array}$$

Умножаем на A:

$$\begin{array}{rl}
 & 1100\ \ 1111\ \ 1110\ \ 1111 \\
\& & \underline{0000\ \ 0000\ \ 1111\ \ 1111} \\
 & 0000\ \ 0000\ \ 1110\ \ 1111
\end{array}$$

Инвертируем:

$$1111\ \ 1111\ \ 0001\ \ 0000.$$

Находим изображающее число конъюнкции $B\overline{C}$:

$$\begin{array}{rl}
 & 0000\ \ 1111\ \ 0000\ \ 1111 \\
\& & \underline{1100\ \ 1100\ \ 1100\ \ 1100} \\
 & 0000\ \ 1100\ \ 0000\ \ 1100
\end{array}$$

Суммируя два последних результата, получаем искомое изображающее число заданной функции:

$$\begin{array}{rl}
 & 1111\ \ 1111\ \ 0001\ \ 0000 \\
+ & \underline{0000\ \ 1100\ \ 0000\ \ 1100} \\
 & 1111\ \ 1111\ \ 0001\ \ 1100
\end{array}$$

В результате получаем:

$$\#\overline{A[B + \overline{C(D + \overline{A}C)}]} + B\overline{C} = 1111\ \ 1111\ \ 0001\ \ 1100.$$

Таким образом, в общем случае для функции, представленной в форме высшего порядка, изображающее число можно найти двумя способами: путём алгебраических преобразований и при помощи операций над изображающими числами. При этом второй способ нередко является более удобным, например, когда в заданном выражении знаки инверсии содержатся не только над аргументами, но и над дизъюнкциями, конъюнкциями и их сочетаниями.

Упражнения

1. Найдите изображающие числа функций:

(АЛБ). $f_1 = A\overline{B} + \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}C + \overline{C}\cdot\overline{\overline{D + A\overline{D}}}}$;

(ПКС). $f_2 = A\cdot\overline{B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}} + \overline{B\overline{C}D + A\cdot CD}$;

(ВАТ). $f_3 = (A + \overline{B + C + D})(B\cdot\overline{C + A\cdot\overline{\overline{C + BD}}})$;

(САД). $f_4 = \overline{\overline{\overline{A + BC}\cdot D + CD}\cdot B + \overline{B}}\cdot CD.$

2. (00.ШУ). Дана функция:

$$0000\ \ 0000\ \ 0001\ \ 1111.$$

Найдите её минимальную форму третьего порядка.

7.4. Восстановление булевой функции по изображающему числу

По виду изображающего числа булеву функцию легко представить в СДНФ, если воспользоваться формулой

$$f = a_0 m_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_k m_k,$$

где $k = 2^n - 1$; n — число аргументов функции;

a_i — двоичные цифры изображающего числа ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$).

Например, для изображающего числа 0011 0111

$$a_0 = a_1 = a_4 = 0;$$
$$a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 1.$$

$$\begin{aligned} f &= 0\cdot m_0 + 0\cdot m_1 + 1\cdot m_2 + 1\cdot m_3 + 0\cdot m_4 + 1\cdot m_5 + \\ &+ 1\cdot m_6 + 1\cdot m_7 = m_2 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = \\ &= (2,3,5,6,7). \end{aligned} \qquad (57)$$

Базис функции по её изображающему числу также нетрудно определить, если воспользоваться формулой

$$S = 2^n \text{ либо } n = \log_2 S,$$

где S — число двоичных знаков изображающего числа;

n — число аргументов булевой функции.

Таким образом, на основе изображающего числа однозначно определяются минтермы и число аргументов функции. Но от каких именно аргументов зависит функция — на этот вопрос изображающее число ответа не даёт. Следовательно, аналитическое выражение функции, представленной изображающим числом, является неоднозначным. Например, для выражения (57) имеем:

$$0011\ 0111 = \#(\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC);$$
$$0011\ 0111 = \#(\overline{P}Q\overline{R} + \overline{P}QR + P\overline{Q}R + PQ\overline{R} + PQR);$$
$$0011\ 0111 = \#(\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ);$$
$$0011\ 0111 = \#(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2A_3);$$

и т. д. без ограничений. Все эти функции зависят от различных аргументов, поэтому являются не равными между собой. Но с другой стороны, все они получены из одного и того же изображающего числа, следовательно, должны быть равными. Устранить это противоречие только по виду изображающего числа невозможно. Необходима дополнительная информация о тех аргументах, от которых зависит заданная функция.

Упражнения

1. Найдите номера минтермов по виду изображающего числа:

(ТВЕ). 0000 0001 1000 0001;
(МВХ). 1100 0110;
(ЗТЗ). 1000 0001;
(984). 0001 0001 0000 0000;
(ЦНК). 1001 1001 0000 0001;
(ОУЛ). 0000 0000 0011 1110.

2. Найдите номера минтермов инверсии функции по виду её изображающего числа:

(ИКМ). 0011 0000;
(ОКН). 1110 1000;
(ПОП). 1111 0000 1010 0001;
(ЗЕР). 0000 0000 1111 1110;
(ОХО). 0101 0101;
(ШЭС). 0001 0111.

3. (58Г). Определите число аргументов функции, если её изображающее число содержит 64 знака.

4. (ХМУ). Определите число аргументов функции, если её изображающее число содержит t знаков, где $1000 < t < 2000$.

5. (МОФ). Определитечисло аргументов функции, если её изображающее число содержит 100 единиц и 28 нулей.

6. (ФАХ). Определите длину изображающего числа, если m — число аргументов.

7. Запишите аналитическое выражение в СДНФ булевой функции по виду её изображающего числа, если известно, что аргументами функции являются буквы A, B, C (минтермы упорядочить по возрастанию их индексов):

(А11).	0000 1000;	(МОИ).	0001 0011;
(УП2).	1000 0000;	(С85).	0010 0101;
(ЛУЗ).	1000 0001;	(896).	0101 1000.

8. Запишите аналитическое выражение в минимальной ДНФ функции по виду её изображающего числа, если известно, что аргументами функции являются A, B, C:

(КОО).	0001 0001;	(ИРЕ).	1111 1101;
(УШМ).	1100 0000;	(ТЫП).	1110 1111;
(Р5К).	0101 0101;	(НАЯ).	1011 1011.

9. Найдите минимальную ДНФ функции по виду её изображающего числа, если аргументами функции являются буквы X, Y, Z:

(УКС).	1111 0000;	(ПШ0).	0000 0000;
(ЗТО).	1111 1111;	(Х0Ф).	0000 1111;
(ХХХ).	0000 1000;	(ДА8).	1010 1010.

10. (ЕМС). Сколько существует изображающих чисел булевой функции пяти аргументов, если функция не определена на пяти наборах?

11. (ХИ0). Булева функция $f(A,B,C)$ не определена на восьми наборах значений аргументов. Сколько существует её изображающих чисел?

12. Дана некоторая булева функция f с четырёхзначным изображающим числом t. Базис этой функции увеличили на три переменные, в результате чего её изображающее число стало равным k.

(НАС). На сколько знаков возросло число k по сравнению с числом t?

(МУР). Сколько единиц в числе k, если в числе t — две единицы?

(ОРЫ). Во сколько раз увеличилось количество нулей в числе k по сравнению с числом t?

7.5. Числовое представление систем булевых функций

Пусть дана система трёх функций:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= A\overline{C} + AB + \overline{A}\,\overline{B}C; \\ f_2 &= AB + AC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}; \\ f_3 &= \overline{C}. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Представим эти функции в виде изображающих чисел одинаковой длины:

$$\left.\begin{aligned} \#f_1 &= 0100 \quad 1011; \\ \#f_2 &= 1000 \quad 0111; \\ \#f_3 &= 1010 \quad 1010. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Получилась двоичная матрица. Она содержит три строки и восемь колонок. Числа, расположенные по колонкам, условимся называть ω-числами, а их последовательность — ω-набором. Очевидно, что количество чисел в ω-наборе равно числу колонок.

Пусть старшим разрядам ω-чисел соответствует функция f_1, тогда ω-набор для систем (58) и (59) примет вид (с учётом порядка):

3, 4, 1, 0, 5, 2, 7, 6.

Представление систем функций в виде ω-наборов является неоднозначным. Например, для системы

$$f_1 = A; \qquad f_2 = AB; \qquad f_3 = B \qquad (60)$$

в базисе (A, B) имеем:

$$\begin{aligned} \#f_1 &= 0011 \\ \#f_2 &= 0001 \\ \#f_3 &= \underline{0101} \\ & 0147 \end{aligned}$$

т. е. для базиса (A, B) ω-набор имеет вид 0, 1, 4, 7.

В базисе (A, B, C) по той же системе функций (60) находим:

$$\begin{aligned} \#f_1 &= 0000 \quad 1111 \\ \#f_2 &= 0000 \quad 0011 \\ \#f_3 &= \underline{0011 \quad 0011} \\ & 0011 \quad 4477 \end{aligned}$$

Чтобы устранить неоднозначность представления системы функций в виде ω-набора, введём для неё понятие минимального базиса. Базис для системы функций является минимальным, если он составлен из аргументов, входящих в минимальные базисы функций исходной системы, т. е. если $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — множества аргументов, образующих минимальные базисы функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ соответственно, то в минимальный базис системы этих k функций войдут только элементы множества P:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k.$$

В связи с этим для системы (60) имеем:

$$P_1 = \{A\};$$
$$P_2 = \{A, B\};$$
$$P_3 = \{B\};$$
$$P = \{A, B\}.$$

Минимальному базису соответствует минимальный ω-набор. Следовательно, ω-набор 0, 1, 4, 7 для системы (60) является минимальным.

По изображающему числу СДНФ функции восстанавливается однозначно, если известны ее аргументы. Справедливо ли такое же утверждение относительно системы функций? В общем случае — нет. Пусть дан ω-набор: 3, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 0. Судя по наибольшему числу 3 (в двоичной системе — 11), этому ω-набору соответствует система двух функций. Переведём в двоичную систему все ω-числа и запишем их в колонки, размещая внизу младшие разряды. Получим следующие изображающие числа:

$$\#f_1 = 1110 \quad 1100;$$
$$\#f_2 = 1001 \quad 0010.$$

Однако ω-набору вида 3, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 0 соответствует и система трёх функций:

$$\#f_1 = 0000 \quad 0000;$$
$$\#f_2 = 1110 \quad 1100;$$
$$\#f_3 = 1001 \quad 0010,$$

а также четырёх, пяти и т. д. Отсюда следует, что по ω-набору изображающие числа системы функций восстанавливаются однозначно, если известно, сколько функций образуют эту систему.

Упражнения

1. Найдите минимальные ω-наборы следующих систем функций.

(5РТ). $f_1 = A;$ $f_2 = AB;$ $f_3 = ABC + \overline{A}\,\overline{B}.$

(ИКК). $f_1 = 0;$ $f_2 = 1;$ $f_3 = ABC.$

(ОПМ). $f_1 = A + B;$ $f_2 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C};$ $f_3 = AB;$ $f_4 = A\overline{B}C.$

(ИЕЛ). $f_1 = AC;$ $f_2 = B;$ $f_3 = 0;$ $f_4 = 1.$

2. Минимальный базис системы четырёх функций насчитывает пять аргументов. (982). Сколько чисел содержит ω-набор этой системы? (НУЗ). Сколько чисел содержит ω-набор, если система состоит из трёх функций при том же базисе?

3. (ТТР). Система насчитывает 6 функций. Назовите наибольшее возможное ω-число.

4. (ТМЕ). Сколько существует различных ω-наборов для системы двух функций, изображающие числа которых содержат по четыре двоичных разряда?

5. (ММС). Найдите минимальные формы функций f_1 и f_2, если их ω-набор имеет вид 2, 2, 2, 2.

6. (КТК). Найдите минимальные формы функций f_1, f_2, f_3, если их ω-набор имеет вид 0, 4, 0, 6, 0, 4, 1, 7. Базис (*A*, *B*, *C*).

7. (ЯР0). Найдите изображающее число функции f_2, если ω-набор для системы трёх функций имеет вид 7, 3, 4, 5, 7, 0, 2, 1.

8. (МОУ). Найдите минимальный ω-набор для системы трёх функций, если $f_1 = f_2 = f_3 = A\overline{B} + \overline{B}C.$

9. (ЗНИ)! Минимальный базис системы трёх функций содержит три аргумента. Известно, что в ω-наборе этой системы нет чисел 0, 1, 2, 3. Найдите: минимальную форму функции f_1; число вхождений её аргументов; число входящих в неё минтермов.

10. (ЕКМ)! Сколько минтермов содержит функция f_4 системы, ω-набор которой имеет вид 8, 8, 4, 9, 9, 0, 2, 10 ? Сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции f_4?

11. По заданной последовательности ω-чисел найдите СДНФ функций f_1, f_2, f_3. В устройство введите число минтермов каждой функции, начиная с f_1.

(ИТР). 2 3 4 6 6 3 2 1; (МЦК). 5 2 1 0 4 3 6 7;
(ЗТЛ). 7 7 3 1 7 3 0 1; (МВ0). 7 7 7 7 0 0 1 7;
(НЫН). 2 2 2 2 3 6 7 2; (ПКФ). 6 2 6 2 2 6 2 6.

7.6. Зависимость и независимость булевых функций

Согласно [15, с. 112] «*n* булевых функций $f_1(A, B, C, \ldots), \ldots, f_n(A, B, C, \ldots)$ независимы, если в совокупности при всевозможных значениях аргументов *A*, *B*, *C*, … они могут принимать 2^n комбинаций значений истинности». То есть функции системы независимы, если в ω-набор входит каждое из чисел 0, 1, 2, …, $2^k - 1$, где k — число аргументов минимального базиса системы. Например, функции системы

$$f_1 = A\overline{C} + AB + B\overline{C};$$
$$f_2 = AB + BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$
$$f_3 = AC + \overline{A}B$$

являются независимыми. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти ω-набор (старшему двоичному разряду каждого ω-числа соответствует функция f_1):

$$\#f_1 = 0010 \quad 1011$$
$$\#f_2 = 1001 \quad 0011$$
$$\#f_3 = \underline{0011 \quad 0101}$$
$$2053 \quad 4167$$

По записи ω-набора видно, что в него входят все возможные трехзначные двоичные числа, что и доказывает независимость функций.

Примером системы, где функции зависимы, является следующий их список:

$$f_1 = A + B + \overline{C};$$
$$f_2 = \overline{B} + AC;$$
$$f_3 = \overline{A} + B\overline{C}.$$

Найдём для этой системы функций ω-набор:

$$\#f_1 = 1011 \quad 1111$$
$$\#f_2 = 1100 \quad 1101$$
$$\#f_3 = \underline{1111 \quad 0010}$$
$$7355 \quad 6656$$

В ω-набор не входят числа 0, 1, 2, 4. Следовательно, функции данной системы зависимы.

Если $n > k$, где n — число функций, входящих в систему, k — число аргументов минимального базиса системы, то функции такой системы всегда зависимы. Например, для системы

$$f_1 = AB + C;$$
$$f_2 = BC + \overline{A}C;$$
$$f_3 = ABC + \overline{C};$$
$$f_4 = A\overline{C} + \overline{B}C$$

имеем: $n = 4$; $k = 3$ (так как минимальный базис системы образуют три аргумента).

Найдём ω-набор:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\#f_1 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\#f_2 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\#f_3 = & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\#f_4 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 2 & 13 & 2 & 12 & 3 & 9 & 11 & 14
\end{array}
$$

Числа ω-набора представляют собой 4-разрядные двоичные коды, которых всего существует 16. А ω-набор содержит лишь 8 чисел. Отсюда следует, что при $n = 4$ и $k = 3$ всегда найдётся не менее восьми чисел из ряда 0, 1, 2, …, 15, которые не войдут в ω-набор, что и доказывает зависимость функций.

Упражнения

1. (АУМ). Укажите номера тех систем, функции которых независимы:

1) $f_1 = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}$; $f_2 = A$; $f_3 = AC + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$;

2) $f_1 = \overline{A}C + \overline{B}C$; $f_2 = B$; $f_3 = AB$;

3) $f_1 = A\overline{B} + \overline{A}BC$; $f_2 = A\overline{C} + AB + B\overline{C}$;
$f_3 = AB\overline{C} + \overline{B}C$;

4) $f_1 = AB + A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$; $f_2 = B\overline{C} + AC$;
$f_3 = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + ABC$;

5) $f_1 = B(A + \overline{C}) + \overline{C}(A + B)$; $f_2 = \overline{B}C + AB\overline{C}$;
$f_3 = \overline{A}BC + A\overline{B}$;

6) $f_1 = \overline{A}(\overline{B} + \overline{C}) + ABC$; $f_2 = A(B + \overline{C}) + \overline{A}\,\overline{B}C$;
$f_3 = AB + AC + B\overline{C}$.

2. (А2Р). Укажите номера тех систем, функции которых зависимы:

1) $f_1 = A + B$; $f_2 = BC + A\overline{C}$; $f_3 = AC$; $f_4 = A + \overline{B} + C$;

2) $f_1 = AC + BC$; $f_2 = A + BC$; $f_3 = \overline{B}C + AC$; $f_4 = \overline{C}$;

3) $f_1 = B + C$; $f_2 = A\overline{C} + B$; $f_3 = BC + A\overline{C}$; $f_4 = \overline{B} + C$;

4) $f_1 = A$; $f_2 = AC + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$; $f_3 = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}$;

5) $f_1 = A + BC$; $f_2 = \overline{A} + \overline{B}C$; $f_3 = B + \overline{A}C$;
$f_4 = C + \overline{A}B$;

6) $f_1 = B + \overline{A}C$; $f_2 = A + BC + \overline{A}\,\overline{B}$; $f_3 = \overline{C}$; $f_4 = AC$.

3. Укажите номера ω-наборов, представляющих системы, функции которых независимы:

(ШИТ).	(236).
1) 0 3 4 1 5 2 6 7;	1) 0 1 2 3 4 2 5 6;
2) 3 5 4 0 6 7 1 2;	2) 0 1 2 3;
3) 3 6 0 1 7 2 3 4;	3) 7 4 3 2 1 5 4 6;
4) 0 3 4 2 6 7 5 1;	4) 7 2 1 0 6 4 5 3;
5) 5 6 2 0 1 3 6 7;	5) 2 3 1 0;
6) 2 3 4 5 1 0 7 6.	6) 4 5 6 7.

7.7. Виды зависимости между двумя функциями

Системе двух функций могут соответствовать только четыре ω-числа: 0, 1, 2, 3. Если в ω-набор входят все эти числа, то, как было сказано выше, функции независимы. Во всех остальных случаях функции связаны некоторой зависимостью. Выясним, сколько и какие виды (типы) зависимости существуют между двумя функциями.

Прежде всего отметим, что вид зависимости полностью определяется ω-набором. Для двух функций существует 16 различных ω-наборов. Сведём все их в таблицу и для каждого набора выясним, какой вид зависимости ему соответствует (табл. 9).

Введём обозначения:

$$\omega_0 = \bar{f}_1 \bar{f}_2; \quad \omega_1 = \bar{f}_1 f_2; \quad \omega_2 = f_1 \bar{f}_2; \quad \omega_3 = f_1 f_2. \qquad (61)$$

Индексы 0, 1, 2, 3 в этих записях являются ω-числами системы двух функций. Если в ω-наборе какое-либо число из 0, 1, 2, 3 отсутствует, то это значит, что соответствующая ω-функция тождественно равна нулю. Поэтому в табл. 9 колонки озаглавлены символами $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ согласно обозначениям (61). В колонках нули обозначают равенство нулю ω-функций, а крестики говорят о том, что соответствующие ω-функции не являются тождественно равными нулю. Слева в таблице приведена колонка с десятичными номерами строк.

Таблица 9

№	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	Вид зависимости
0	0	0	0	0	—
1	0	0	0	×	$f_1 \equiv f_2 \equiv 1$
2	0	0	×	0	$f_1 \equiv 1, \quad f_2 \equiv 0$
3	0	0	×	×	$f_1 \equiv 1, \quad f_2 \not\equiv 0, \quad f_2 \not\equiv 1$
4	0	×	0	0	$f_1 \equiv 0, \quad f_2 \equiv 1$
5	0	×	0	×	$f_1 \not\equiv 1, \quad f_1 \not\equiv 0, \quad f_2 \equiv 1$
6	0	×	×	0	взаимная инверсия
7	0	×	×	×	пересечение, $F_1 \cup F_2 = I$
8	×	0	0	0	$f_1 \equiv f_2 \equiv 0$
9	×	0	0	×	равенство функций
10	×	0	×	0	$f_1 \not\equiv 0, \quad f_1 \not\equiv 1, \quad f_2 \equiv 0$
11	×	0	×	×	отношение включения $F_2 \subset F_1$
12	×	×	0	0	$f_1 \equiv 0, \quad f_2 \not\equiv 0, \quad f_2 \not\equiv 1$
13	×	×	0	×	отношение включения $F_1 \subset F_2$
14	×	×	×	0	отношение ортогональности
15	×	×	×	×	функции независимы.

В первой сверху строке записаны четыре нуля. Это значит, что все ω-функции тождественно равны нулю, т. е. все ω-числа отсутствуют. Такой случай невозможен, поэтому данной строке не соответствует никакая зависимость между функциями f_1 и f_2.

В следующей строке записано:

$$\omega_0 \equiv \omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0; \quad \omega_3 \not\equiv 0.$$

Найдём изображающие числа функций f_1 и f_2. Для этого их разряды представим в виде (считая, что функции зависят от двух аргументов):

$$
\begin{array}{rcccc}
\#f_1 = & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\#f_2 = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
\hline
 & 3 & 3 & 3 & 3
\end{array}
$$

где x_i и y_i (i = 1, 2, 3, 4) — цифры изображающих чисел функций f_1 и f_2. Так как при поколонном считывании должно получаться только число 3 (все остальные ω-числа отсутствуют согласно записи строки 1 табл. 9), то нетрудно сделать вывод, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$$

и что $f_1 \equiv f_2 \equiv 1$.

Согласно строке 2 имеем:

$$\omega_0 \equiv \omega_1 \equiv \omega_3 \equiv 0; \quad \omega_2 \not\equiv 1.$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, получаем:

$$\begin{array}{l} \#f_1 = x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \#f_2 = \underline{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4} \\ \qquad\ \ 2 \quad\ 2 \quad\ 2 \quad\ 2 \end{array}$$

отсюда следует, что $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$; $y_1 = y_2 = y_3 = = y_4 = 0$; т. е. $f_1 \equiv 1$; $f_2 \equiv 0$.

Аналогично заполнены строки 4 и 8.

В строке 3 указано, что среди ω-чисел отсутствуют числа 0 и 1. В связи с этим запишем:

$$\begin{array}{l} \#f_1 = x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \#f_2 = \underline{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4} \\ \qquad\ \ 2 \quad\ 2 \quad\ 3 \quad\ 3 \end{array}$$

Числа 2 и 3 под колонками можно записывать в любом порядке, причём количество двоек и троек может быть другим, важно лишь, чтобы обе цифры присутствовали и общее их число было бы равным 4. Независимо от выбора ω-набора, состоящего из цифр 2 и 3, всегда будут иметь место соотношения:

$$f_1 \equiv 1, \quad f_2 \not\equiv 0, \quad f_2 \not\equiv 1.$$

Аналогично рассуждая, находим, что в строке 5: $f_1 \not\equiv 1$, $f_1 \not\equiv 0$, $f_2 \equiv 1$; в строке 10: $f_1 \not\equiv 0$, $f_1 \not\equiv 1$, $f_2 \equiv 0$; в строке 12: $f_1 \equiv 0$, $f_2 \not\equiv 1$, $f_2 \not\equiv 0$.

Это были тривиальные случаи. Осталось семь строк, для каждой из которых справедливы соотношения:

$$\begin{array}{l} f_1 \not\equiv 0; \quad f_1 \not\equiv 1; \\ f_2 \not\equiv 0; \quad f_2 \not\equiv 1. \end{array}$$

Рассмотрим строку 6. В ней указано, что ω-числа 0 и 3 отсутствуют. Следовательно,

$$\begin{array}{l} \#f_1 = x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \#f_2 = \underline{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4} \\ \qquad\ \ 1 \quad\ 2 \quad\ 2 \quad\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \#f_1 = \ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0; \\ \#f_2 = \ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1. \end{array}$$

Как бы мы ни распределяли числа 1 и 2 под колонками x_i, y_i (i = 1, 2, 3, 4), изображающие числа функций f_1 и f_2 всегда будут взаимно инверсными. Это и есть **отношение взаимной инверсии**, то есть вид зависимости, соответствующий случаю, когда ω-набор системы двух функций содержит только числа 1 и 2. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что строке 9 соответствует **отношение равенства** функций.

Рассмотрим строку 11. В ней отсутствует число 1. Если в ω-набор входят числа 0, 2, 3, но нет числа 1, то всегда имеет место соотношение

$$F_2 \subset F_1,$$

где F_1 — множество минтермов функции f_1, F_2 — множество минтермов функции f_2. Такой тип зависимости назовём **отношением включения** вида $F_2 \subset F_1$. Для примера рассмотрим ω-набор 0, 2, 3, 3, 2, 0, 2, 2. Ему соответствует система вида

$$f_1 = B + A\overline{C} + \overline{A}C = (1,2,3,4,6,7);$$
$$f_2 = \overline{A}B = (2,3),$$

откуда видно, что функция f_2 является импликантой функции f_1.

Строке 13 соответствует такой же тип зависимости, с той лишь разницей, что множества F_1 и F_2 поменялись местами.

Рассмотрим строку 7. Ей соответствует наиболее сложный тип зависимости, суть которой заключается в том, что множества F_1 и F_2 минтермов, образующих функции f_1 и f_2, пересекаются, а их объединение совпадает с I, где I — универсальное множество (т. е. множество всех минтермов функций f_1 и f_2):

$$F_1 \cap F_2 \neq \varnothing; \qquad F_1 \cup F_2 = I.$$

В строке 14 отражён случай, когда множества F_1 и F_2 минтермов функций f_1 и f_2 не пересекаются, т. е. $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Это, согласно [47, с. 71], — **отношение ортогональности.**

Наконец, в строке 15 отмечено, что функции независимы.

Упражнения

1. Найдите ω-наборы систем функций

(ИЕЕ).	(Т32).	(ОВЗ).
$f_1 = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;	$f_1 = A + BC$;	$f_1 = A + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$;
$f_2 = A + B.$	$f_2 = A + B.$	$f_2 = B + CD.$

2. (АП4). Найдите номера систем функций, для которых справедливо соотношение $f_2\,\bar{f}_1 \equiv 0$.

1) $f_1 = AB + C$; $f_2 = AB.$

2) $f_1 = ABC$; $f_2 = AB.$

3) $f_1 = A + B$; $f_2 = A + B + C.$

4) $f_1 = \overline{A} + \overline{B}C$; $f_2 = \overline{A}\,\overline{B}.$

5) $f_1 = A + B + C$; $f_2 = ABC.$

6) $f_1 = A + B + C + D$; $f_2 = B + \overline{C}.$

3. Укажите номер типа зависимости (см. табл. 9), если заданы ω-наборы:

(ВП5).	2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 3;	(МУ0).	2, 2, 3, 0;
(УМ6).	0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 3;	(0ДМ).	2, 3, 3, 0, 2, 0, 0, 3;
(5П7).	2, 1, 3, 2;	(52Т).	1, 1, 3, 3.

4. (УХС). Известно, что $f_1 = f_2$. В функцию f_1 включили ещё один минтерм. Вид зависимости от этого изменился. Какой номер из табл. 9 получит этот новый тип зависимости, если в обеих системах функции константа нуль и константа единица отсутствуют?

5. Пусть F_1 — множество минтермов функции f_1, F_2 — множество минтермов функции f_2. Укажите номер типа зависимости (табл. 9), если известно, что

(МУП). $\overline{F}_2 \neq \varnothing$; $\overline{F}_2 \cap F_1 = \varnothing$; $F_1 \neq F_2$;

(899). $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = \varnothing$;

(ЭЭЯ). $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; $F_1 \cup F_2 = I$;

(220). $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \neq \varnothing$.

6. (ЕТС). Найдите минимальные формы конъюнкции и дизъюнкции функций системы, ω-набор которой имеет вид 2, 2, 1, 1.

7. (ПОФ). Даны две функции f_1 и f_2, зависимость между которыми имеет вид $F_2 \subset F_1$ (табл. 9). Функция f_1 задана: $f_1 = B + AC$. Сколько существует различных выражений для функции f_2, если (A, B, C) — базис системы?

8. (222). Даны две независимые функции. Укажите в табл. 9 тип зависимости их инверсий.

7.8. Нахождение явного вида логической зависимости

Пусть дана некоторая система функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ с базисом (A, B, C, …). Символы $f_1, f_2, \ldots, f_k$ являются двоичными переменными и их можно рассматривать как аргументы некоторой функции $F(f_1, f_2, \ldots, f_k)$. Если аргументам A, B, C, … задавать различные наборы значений, то переменные (логические аргументы) $f_1, f_2, \ldots, f_k$ также будут принимать некоторые значения. На одних наборах функция F будет равна нулю, на других — единице в зависимости от функции F. Спрашивается, какой вид должна иметь функция F, чтобы она принимала единичное значение на всех наборах значений аргументов A, B, C, … , т. е.

$$F(f_1, f_2, \dots, f_k) = 1.$$

Функция F, удовлетворяющая этому соотношению, и определяет явный вид логической зависимости функций $f_1, f_2, \dots, f_k$.

Способ нахождения явной зависимости рассмотрим на примере следующей системы функций:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= AC + \bar{B}C; \\ f_2 &= AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C; \\ f_3 &= AC + A\bar{B}. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

Для базиса (A, B, C) ω-набор этой системы имеет вид 0, 4, 0, 2, 1, 7, 2, 5. В наборе отсутствуют числа 3 и 6, следовательно, функции системы (62) зависимы.

Пусть теперь символы f_1, f_2, f_3 являются аргументами функции $F(f_1, f_2, f_3)$. Как аргументы они могут принимать любые наборы значений: 0,1,…,7, при этом известно, что на наборах 3 и 6 функция $F(f_1, f_2, f_3)$ равна нулю, а на остальных — единице. Следовательно, изображающее число функции F представится в виде

$$\#F(f_1, f_2, f_3) = 1110 \quad 1101.$$

На основе этого изображающего числа находим явный вид функции F:

$$F = \bar{f}_2 + f_1 f_3 + \bar{f}_1 \bar{f}_3.$$

Очевидно, что $F = 1$ на всех наборах значений аргументов A, B, C. Чтобы убедиться в этом, достаточно в формулу F подставить функции f_1, f_2, f_3, выраженные через аргументы A, B, C:

$$\begin{aligned} \# f_1 &= 0100 \quad 0101; \\ \# f_2 &= 0001 \quad 0110; \\ \# f_3 &= 0000 \quad 1101; \\ \#(f_1 f_3) &= 0000 \quad 0101; \\ \#(\bar{f}_1 \bar{f}_3) &= 1011 \quad 0010; \\ \#F(A,B,C) &= 1111 \quad 1111, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\bar{f}_2 + f_1 f_3 + \bar{f}_1 \bar{f}_3 = 1.$$

Это и есть вид явной зависимости функций системы (62).

Рассмотрим ещё один пример. Пусть дана система двух функций, связанных зависимостью 9 (табл. 9). Найдём явный тип зависимости этих функций.

В ω-наборе системы функций, связанных зависимостью типа равенства, отсутствуют числа 1 и 2. Следовательно, изображающее число функции $F(f_2, f_1)$ представится в виде 1001, откуда находим явный вид функции $F(f_1, f_2)$:

$$F(f_1, f_2) = \bar{f}_1 \bar{f}_2 + f_1 f_2.$$

Очевидно, что если $f_1 = f_2$, то $F(f_1, f_2) = 1$. Если же $f_1 \neq f_2$, то $F(f_1, f_2) = 0$. От каких бы аргументов ни зависели функции f_1 и f_2, всегда при $f_1 = f_2$ имеет место равенство

$$\bar{f}_1 \bar{f}_2 + f_1 f_2 = 1.$$

Это и есть явный вид логической зависимости системы равных функций.

Упражнения

Примечание. *При вводе в устройство явного вида логической зависимости набирать необходимо только левую часть равенства. Например:* $f_1 \bar{f}_2 + \bar{f}_2 \bar{f}_3 = 1$. *Набор осуществляется посимвольно следующим образом:* $f\,1 - f\,2 + - f\,2 - f\,3$, *где чёрточка обозначает знак инверсии. Перед вводом выражение минимизировать в классе ДНФ.*

1. (ОК.СИ). Система состоит из трёх функций f_1, f_2, f_3, при этом $f_1 = f_2 = f_3$. Найдите явный вид логической зависимости этих трёх функций.

2. Найдите вид явной логической зависимости, тип которой в табл. 9 имеет номер:

(58.СИ). 6;	(РХ.ВИ). 7;	(ШУ.В4). 9;
(ОМК). 11;	(37С). 13;	(МВВ). 14.

3. (8СС). Найдите вид явной логической зависимости функций:

$$f_1 = S_1(A, B, C);$$
$$f_2 = S_2(A, B, C).$$

4. На каких наборах значений аргументов f_1, f_2, f_3, функция $F(f_1, f_2, f_3)$ равна нулю, если функции системы связаны явной зависимостью вида (наборы представить в десятичной системе):

(П26). $f_1 \bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_3 = 1$; (РУ0). $\bar{f}_1 f_2 + \bar{f}_1 \bar{f}_3 + f_2 f_3 = 1$;

(0РН). $f_1 f_2 f_3 + \bar{f}_1 \bar{f}_2 f_3 = 1$; (ЛУМ). $\bar{f}_1 f_2 f_3 + f_1 \bar{f}_2 = 1$.

5. (СТИ). Найдите минимальную ДНФ функции f_1 при

$$f_1 f_2 + f_1 f_3 = 1.$$

6. (ЛБ.СИ). Найдите вид явной логической зависимости функций:

$$f_1 = \bar{A}C + B;$$
$$f_2 = B;$$
$$f_3 = \bar{B} + C.$$

7. (ША.ВИ). Найдите вид явной логической зависимости функций, если $F_1 \subset F_2 \subset F_3$, где F_1, F_2, F_3 — непустые множества минтермов функций f_1, f_2, f_3 соответственно; $f_3 \not\equiv 1$.

8. БУЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ

8.1. Уравнения с одной неизвестной переменной

Примером простейшего булева уравнения является выражение вида

$$AX = 0, \qquad (63)$$

где A — независимая булева переменная, X — неизвестная переменная.

При каком значении X выполняется это равенство? Очевидно, только при $X = 0$. Значение неизвестной переменной $X = 0$ и является решением уравнения (63), т. е. его корнем.

Правая часть простейшего уравнения может быть равной не только нулю, но и единице. Например:

$$A + \bar{B} + \bar{X} = 1. \qquad (64)$$

Неизвестная переменная X может принимать лишь два значения — 0 или 1. Пусть $X = 1$, тогда

$$A + \bar{B} + \bar{1} = A + \bar{B} \neq 1,$$

из чего делаем вывод, что $X = 1$ не является решением уравнения (64). Пусть $X = 0$, тогда

$$A + \bar{B} + \bar{0} = 1,$$

откуда следует, что $X = 0$ это и есть корень уравнения (64).

Рассмотренные два уравнения относятся к односторонним, так как их правая часть есть константа нуль или константа единица.

В общем случае одностороннее булево уравнение имеет вид

$$\varphi X + \psi \overline{X} + f = 1, \qquad (65)$$

где φ, ψ, f — булевы функции, не зависящие от переменной X. Это дизъюнктивная форма уравнения. По аналогии с выражением (65) можно получить конъюнктивную форму уравнения:

$$(\varphi + X)(\psi + \overline{X}) f = 0.$$

Левую часть одностороннего уравнения можно подвергать любым тождественным преобразованиям — раскрывать скобки, инвертировать, минимизировать и т. д. Рассмотрим, например, уравнение вида

$$AB + BX + \overline{A}C + \overline{A}X + CX + ABC\overline{X} + B\overline{C}\,\overline{X} + A\overline{B}\,\overline{C} = 1. \qquad (66)$$

Приведём его к виду (65):

$$(\overline{A} + B + C)X + (ABC + B\overline{C})\overline{X} + AB + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C = 1.$$

При $X = 0$ имеем: $ABC + B\overline{C} + AB + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C \neq 1$, следовательно, $X = 0$ не является корнем уравнения (66).

При $X = 1$ получаем: $\overline{A} + B + C + AB + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C = 1.$

При $X = 1$ выражение (66) обращается в тождество, следовательно, $X = 1$ является корнем уравнения (66).

Решение уравнения (66) можно найти гораздо быстрее, если левую его часть минимизировать (например, с помощью карты Вейча). При этом неизвестная переменная рассматривается как обычная переменная:

$$B + X + A\overline{C} + \overline{A}C = 1.$$

По этой записи непосредственно заключаем, что равенство верно при $X = 1$. Если же $X = 0$, то

$$B + A\overline{C} + \overline{A}C \neq 1.$$

Рассмотрим ещё один пример:

$$X(A\overline{B} + \overline{A}B + BC) + \overline{B}(\overline{A}X + A\overline{X} + C) + \overline{X}(AB + \overline{A}\,\overline{B}) + B(AX + \overline{A}\,\overline{X}) = 1. \qquad (67)$$

Это равенство справедливо при обоих значениях X, в чём нетрудно убедиться, если левую часть уравнения нанести на карту Вейча (она вся будет занята единицами). Следовательно, уравнение (67) имеет два решения: $X = 0$ и $X = 1$. Для проверки решения подставим в (67) сначала $X = 0$, затем $X = 1$:

$$\overline{B}(A + C) + AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B = 1;$$

$$A\overline{B} + \overline{A}B + BC + \overline{B}(\overline{A} + C) + AB = 1.$$

В обоих случаях равенство единице сохраняется. Это значит, что решения являются верными.

Двусторонние уравнения к виду (65) не сводятся, так как в булевой алгебре нет операции вычитания. Решить двустороннее уравнение можно путём подстановки вместо неизвестной переменной нуля или единицы. То значение, на котором имеет место тождество, и есть корень уравнения. Поясним это на примере:

$$AB + X = \overline{X}AB.$$

Пусть $X = 1$, тогда $AB + 1 \neq \overline{1} \cdot AB$. Значение $X = 1$ не является решением уравнения. Если же принять $X = 0$, то $AB + 0 = \overline{0} \cdot AB$, откуда следует, что искомое решение — это $X = 0$.

Существуют уравнения, не имеющие решений. Например, равенство

$$A + X = \overline{X}B$$

не выполняется ни при $X = 1$, ни при $X = 0$. Следовательно, это уравнение неразрешимо.

Упражнения

1. (ШБС)! Найдите корни уравнений:

$$AX + B = B; \quad A + \overline{X} = 1; \quad A\overline{X} + X = 1.$$

2. Укажите номера уравнений, не имеющих решений.

(Л00).	(23М).
1) $A + BX = C$;	1) $A + B = X$;
2) $AX + B\overline{X} = B$;	2) $A + B = X + C$;
3) $X + B\overline{X} = 0$;	3) $X + B = C + \overline{X}$;
4) $AX + \overline{A}\overline{X} = \overline{A}$;	4) $BX + C = AX + C$;
5) $(A + BX)\overline{X} = 1$;	5) $A + B\overline{X} = A + B$;
6) $(BX + C)\overline{X} = 1$.	6) $A + BX = AX + C$.

3. (АРП). Укажите уравнения, имеющие два корня:

1) $A(C + X) + A\overline{X} + B + \overline{A}\,\overline{B} = 1$;
2) $B(C + X) + C\overline{X} + C + \overline{A}B = 1$;
3) $A(X + B) + X(\overline{A} + C) + \overline{A}(B + \overline{X}) + A\overline{X} = 1$;
4) $\overline{C}(\overline{A} + BX) + A(X + B) + \overline{B}(X + \overline{C}) + BC = 1$;
5) $A(B + X) + \overline{C}(BX + \overline{A}) + BC + \overline{B}\,\overline{C} = 1$;
6) $B(A + X) + \overline{B}(\overline{C}X + \overline{A}) + A\overline{B} + \overline{A}B = 1$;
7) $A\overline{B} + BX + \overline{A}\,\overline{C}X + CX + BC\overline{X} = 1$.

4. (ПСС). Укажите номера уравнений (см. упр. 3), не имеющих решений.

5. (КШК). Укажите номера уравнений (см. упр. 3), имеющих один корень.

6. На рис. 68 приведены карты Вейча, на которых изображены уравнения с правой частью, равной единице. (ААТ). Укажите номера карт, которым соответствуют уравнения, имеющие один корень. (ВТХ). Укажите карты, которым соответствуют неразрешимые уравнения.

7. На рис. 69 приведены карты Вейча. На них представлены уравнения, правая часть которых равна единице. (ИРИ). Укажите номера уравнений с корнями, равными единице. (УЕЕ). Укажите номера карт, которым соответствуют уравнения с корнями, равными нулю.

1	1	1	1
	1		
	1	1	1
1	1	1	1

1)

		1	
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1		

2)

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

3)

	1	1	
	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	1

4)

1			1
1	1	1	1
1	1	1	
1		1	

5)

1	1	1	1
1		1	1
	1	1	
1	1	1	1

6)

Рис. 68

1	1	1	1
	1		1
	1		
1	1	1	1

1)

1	1		
1	1	1	1
1		1	1
		1	1

2)

1	1	1	1
1			1
1	1		
1	1	1	1

3)

	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
1			1

4)

	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	1

5)

1	1	1	1
1	1		
	1	1	
1	1	1	1

6)

Рис. 69

8.2. Уравнения с несколькими неизвестными переменными

Примером простейшего уравнения с двумя неизвестными является выражение вида $AXY = 0$, где A — булева переменная, X и Y — неизвестные переменные.

Это уравнение имеет три решения:

$$X = Y = 0;$$
$$X = 1, \quad Y = 0;$$
$$X = 0, \quad Y = 1.$$

В общем случае уравнения с несколькими неизвестными можно решать так же, как и с одним неизвестным, т. е. путём перебора всех возможных решений. Если уравнение содержит две неизвестные переменные, то проверять надо четыре варианта, если три — то восемь, и т. д. Если уравнение содержит n неизвестных, то число проверок равно 2^n. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти значения X и Y, при которых имеет место равенство

$$AX + XY + \overline{X}A = 1. \qquad (68)$$

В этом уравнении две неизвестные переменные, следовательно, всего необходимо проверить четыре варианта подстановок: 00, 01, 10, 11, где первые цифры соответствуют неизвестной X, вторые — Y, т. е.

$$X = Y = 0;$$
$$X = 1, \quad Y = 0;$$
$$X = 0, \quad Y = 1;$$
$$X = Y = 1.$$

Допустим, что решением уравнения (68) являются значения $X = Y = 0$. Тогда имеем

$$A \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \overline{0} \cdot A = A \neq 1.$$

Так как результат не равен единице, то значения $X = Y = 0$ не являются решением уравнения (68).

Проверим второй вариант: $X = 0$, $Y = 1$. Получим тот же результат.

Пусть $X = 1$, $Y = 0$. Подставим эти значения в (68):

$$A \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \overline{1} \cdot A \neq 1.$$

Результат подстановки не равен единице, следовательно, значения $X = 1$, $Y = 0$ не являются решением уравнения (68).

При $X = Y = 1$ выражение (68) обращается в тождество, следовательно, $X = Y = 1$ — это есть искомое решение.

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$AX + Y\overline{Z} + \overline{A}Z = 1. \qquad (69)$$

Здесь три неизвестные переменные, следовательно, проверить необходимо 8 вариантов подстановок. Сведём их в таблицу (табл. 10).

Таблица 10

X	Y	Z	$AX + Y\overline{Z} + \overline{A}Z =$
0	0	0	$A \cdot 0 + 0 \cdot \overline{0} + \overline{A} \cdot 0 \neq 1$
0	0	1	$A \cdot 0 + 0 \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot 1 \neq 1$
0	1	0	$A \cdot 0 + 1 \cdot \overline{0} + \overline{A} \cdot 0 = 1$
0	1	1	$A \cdot 0 + 1 \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot 1 \neq 1$
1	0	0	$A \cdot 1 + 0 \cdot \overline{0} + \overline{A} \cdot 0 \neq 1$
1	0	1	$A \cdot 1 + 0 \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot 1 = 1$
1	1	0	$A \cdot 1 + 1 \cdot \overline{0} + \overline{A} \cdot 0 = 1$
1	1	1	$A \cdot 1 + 1 \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot 1 = 1$

В левой её части перечислены все восемь наборов значений неизвестных переменных. В правой — для каждого набора указано, равна или не равна единице левая часть уравнения. Из таблицы видно, что уравнение (69) имеет четыре решения:

$$X = 0, \quad Y = 1, \quad Z = 0;$$
$$X = 1, \quad Y = 0, \quad Z = 1;$$
$$X = 1, \quad Y = 1, \quad Z = 0;$$
$$X = 1, \quad Y = 1, \quad Z = 1.$$

Пример 3. Решить двустороннее уравнение с двумя неизвестными:

$$AXY + B\overline{X}\overline{Y} = A\overline{B}X + B\overline{X}. \qquad (70)$$

Проверяем четыре варианта подстановок. Сначала примем $X = Y = 0$:

$$A \cdot 0 \cdot 0 + B \cdot \overline{0} \cdot 0 = A\overline{B} \cdot 0 + B \cdot \overline{0}.$$

В результате получаем $0 \neq B$. Следовательно, $X = Y = 0$ не является решением уравнения (70).

На наборе $X = 0$, $Y = 1$ имеем $B = B$. Левая часть равна правой. Это значит, что одно решение найдено. Оно является и единственным, поскольку при $X = 1$, $Y = 0$ получаем $0 \neq A\overline{B}$, а при $X = Y = 1$ имеем $A \neq A\overline{B}$.

Упражнения

1. (0МС). Найдите наибольшее число решений, которое в принципе может иметь уравнение, если в нём 4 неизвестных?

2. (ФЯТ). Найдите значения X, Y, Z, V, если

$$XYZV(A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B) = B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C.$$

3. (ЯКУ). При каких значениях X, Y, Z выполняется равенство $(A + X)(B + \overline{Y})(C + Z) = 1$?

4. (ПУФ). Сколько решений имеет уравнение, содержащее пять неизвестных X_1, X_2, X_3, X_4, X_5:

$$(A + \overline{A}B)(X_1X_2X_3X_4X_5 + \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4 + \overline{X}_5) = B + A\overline{B}?$$

5. (ПВХ). Составьте уравнение по условиям:

а) левая часть представляет собой дизъюнкцию двух конъюнкций;

б) если принять $Y = 0$, то получится $AX = 1$;

в) если принять $X = 0$, то получится $BY = 1$;

В устройство ввести левую часть уравнения.

8.3. Уравнения конъюнктивного типа

В двух предыдущих подразделах рассматривались уравнения, в которых неизвестными были отдельные переменные. Решение таких уравнений сводится к отысканию корней, обращающих в тождество всё выражение, если их подставить в уравнение вместо неизвестных переменных.

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда неизвестной является не отдельная переменная, а функция нескольких переменных. Из всего множества таких уравнений выделим класс выражений, сводящихся к виду

$$X \cdot \varphi = f, \qquad (71)$$

где φ и f — явно заданные функции, зависящие от некоторых аргументов, например, A, B, C, …; X — неизвестная функция, зависящая от тех же аргументов.

Уравнения, сводящиеся к (71), условимся называть конъюнктивными.

Решение конъюнктивных уравнений поясним на примере. Пусть $\varphi = AB + BC$; $f = ABC$, тогда уравнение примет вид

$$X(AB + BC) = ABC. \qquad (72)$$

Согласно этой записи требуется найти такую функцию $X(A, B, C)$, чтобы конъюнкция этой функции и выражения $AB + BC$ равнялась ABC.

Представим функции φ, X, f в виде изображающих чисел:

$$\&\begin{array}{r|cccccccc} \#\varphi = & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \# X = & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline f = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

где символами x_i $(i = 0,1,2,\ldots,7)$ обозначены двоичные цифры изображающего числа функции X. Решение уравнения сводится к отысканию значений переменных x_i. Прежде всего отметим, что на наборе значений аргументов 111, т. е. когда $A = B = C = 1$, имеем: $f = 1$ и $\varphi = 1$. Отсюда следует, что $x_7 = 1$. Далее, на наборе 011 $\varphi = 1$, а $f = 0$. Это значит, что x_3 может быть только равным нулю. То же самое относится и к x_6: $x_3 = x_6 = 0$.

На всех остальных наборах функция φ равна нулю. Функция f на этих наборах также равна нулю. Следовательно, переменные x_0, x_1, x_2, x_4, x_5 могут принимать любые значения — либо 0, либо 1.

Таким образом, функция $X(A, B, C)$ определена на наборах 3, 6, 7, а на всех остальных наборах — 0, 1, 2, 4, 5 — не определена. Доопределить её можно 32 способами. Каждый из вариантов доопределения представляет собой решение уравнения (72). Следовательно, уравнение (72) имеет 32 решения. Запишем некоторые из них:

$$X = AC;$$
$$X = \overline{B} + AC;$$
$$X = AC + \overline{A}\,\overline{B};$$
$$X = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C \text{ и т.д.}$$

Если все 32 решения поочерёдно подставлять в выражение (72), то всякий раз будет получаться тождество. Например, для $X = \overline{B} + AC$ имеем:

$$(\overline{B} + AC)(AB + BC) = ABC,$$

в чём нетрудно убедиться, если в левой части уравнения раскрыть скобки.

Упражнения

1. Дано булево уравнение вида

$$X(B\overline{C} + \overline{A}C) = AB\overline{C} + \overline{A}BC.$$

(Н0Р). Определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

(УЧВ). Укажите наборы (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(И0Г). Из всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C)$ найдите самую минимальную (при вводе в устройство аргументы упорядочить по алфавиту).

(ИМД). Укажите десятичные эквиваленты наборов, на которых минимальная ДНФ функции $X(A, B, C)$ доопределена единицами.

(АКЕ). Для базиса (A, B, C, D) определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

(ВУЖ). Укажите наборы, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена (наборы представить в десятичной системе).

(ИМЗ). Из всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C, D)$ найти самую минимальную.

(В54). В нижеприведённом списке укажите номера функций, являющихся решениями заданного уравнения:

1) $X = \overline{B}C + A\overline{C}$;
4) $X = \overline{A}\,\overline{C} + AB + BC$;
2) $X = AB + BC$;
5) $X = A\overline{C} + \overline{A}BC$;
3) $X = B\overline{C} + AB\overline{C}$;
6) $X = \overline{B}\,\overline{C} + BC + A\overline{C}$.

2. Дано булево уравнение вида

$$\overline{A}(CX + \overline{B}X) + ABX = AB + BC.$$

(ЭХК). Определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

(ТВ1). Укажите наборы (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(ЕС2). Из всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C)$ найдите самую минимальную.

(0В3). Для базиса $X(A, B, C, D)$ определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

(ИЛИ). Укажите наборы, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена.

8.4. Уравнения дизъюнктивного типа

Булевы выражения, представленные в виде

$$X + \varphi = f,$$

где φ и f — явно заданные функции, X — неизвестная функция, зависящая от тех же аргументов, что и функции φ и f, условимся называть уравнениями дизъюнктивного типа. Решение таких уравнений поясним на примере уравнения

$$X + \overline{A}B + A\overline{B}C = C + A\overline{B} + \overline{A}B. \qquad (73)$$

Согласно записи этого уравнения требуется найти такую функцию $X(A, B, C)$, логическая сумма которой с $\overline{A}B + A\overline{B}C$ равнялась бы $C + A\overline{B} + \overline{A}B$.

Запишем уравнение (73) с помощью изображающих чисел:

$$+\begin{array}{r|cccccccc} \#\varphi = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \# X = & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline \# f = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

На наборе 111 (когда $A = B = C = 1$) функция $f = 1$. Но функция φ на этом наборе равна нулю. Следовательно, значение x_7 может быть равно только единице. То же самое относится и к x_1 и x_4:

$$x_1 = x_4 = x_7 = 1.$$

На наборе 000 (когда $A = B = C = 0$) функции f и φ равны нулю. Следовательно, x_0 может быть равно только нулю. То же самое относится и к x_6:

$$x_0 = x_6 = 0.$$

На наборе 010 имеем: $\varphi = f = 1$. Следовательно, значение x_2 может быть любым. То же самое относится и к наборам 011 и 101.

Таким образом, $X(A, B, C)$ — это функция, принимающая единичное значение на наборах 1, 4, 7, равная нулю на наборах 0, 6 и не определённая на наборах 2, 3, 5. Существует восемь способов её доопределения. Следовательно, уравнение (73) имеет восемь решений:

$$x_1 = ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C;$$
$$x_2 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC;$$
$$x_3 = BC + \overline{A}C + A\overline{B}\,\overline{C};$$
$$x_4 = BC + \overline{A}B + \overline{A}C + A\overline{B}\,\overline{C};$$
$$x_5 = AC + A\overline{B} + \overline{B}C;$$
$$x_6 = AC + A\overline{B} + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C};$$
$$x_7 = C + A\overline{B} + \overline{A}B;$$
$$x_8 = C + A\overline{B}.$$

При подстановке этих выражений в уравнение (73) получаются тождества. Например, для

$$X = C + A\overline{B}$$

имеем:

$$C + A\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}C = C + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно обе его части записать в виде изображающих чисел (они будут равными).

Упражнения

1. Дано булево уравнение вида

$$X + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + ABC = AB + A\overline{C} + \overline{A}C.$$

(ЕХП). Укажите десятичные эквиваленты наборов значений аргументов A, B, C, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(ХТО)! Введите в устройство число решений уравнения. Среди всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C)$ найдите самую минимальную и число её вхождений аргументов также введите в устройство (минимальную ДНФ при этом не вводить).

(ЗЗР). Для базиса (A, B, C, D) укажите наборы значений аргументов (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена.

(ХСС). Укажите номера всех выражений, являющихся решениями заданного уравнения:

1) $X = AB + A\overline{C}$;	5) $X = A\overline{C} + \overline{B}C$;
2) $X = BC + \overline{A}C$;	6) $X = \overline{A}C + AB$;
3) $X = AB + BC$;	7) $X = \overline{A}B + A\overline{C}$;
4) $X = A\overline{C} + BC$;	8) $X = A\overline{C} + \overline{A}C$.

2. Дано булево уравнение вида

$$X + A\overline{B} + \overline{A}B + AC + \overline{B}C = 1.$$

(Д5Т). Найдите минимальную ДНФ функции $X(A, B, C)$ и определите число решений уравнения.

(РВУ). Перечислите наборы (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

3. Дано: F_1 — множество минтермов функции φ, F_2 — множество минтермов функции f. Известно, что $F_1 \subset F_2$ и что $|F_1| = 6$, $|F_2| = 9$.

(ЕМП). Для дизъюнктивного уравнения определите число его решений и укажите число наборов, на которых функция X равна единице при доопределении ее нулями.

(УД0). Найдите то же самое для случая, когда $F_1 = \varnothing$, а $|F_2| = 9$.

8.5. Другие типы булевых уравнений

Кроме дизъюнктивных и конъюнктивных, существует много других типов уравнений. Например:

$$\varphi_1 + \varphi_2 X = X + \varphi_3;$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 X + \varphi_3 \overline{X} = \varphi_4 \overline{X} + \varphi_5;$$
$$\varphi_1 X + \varphi_2 \overline{X} + \varphi_3 = 1 \text{ и т.д.,}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — явно заданные функции, X — неизвестная функция, $\overline{X}$ — её инверсия.

Все они могут быть решены с помощью изображающих чисел, как и в случае двух предыдущих типов. Поясним их решение на примере следующего уравнения:

$$\varphi_1 X + \varphi_2 \overline{X} = f,$$

где $\varphi_1 = A + \overline{B} + \overline{C}$; $\varphi_2 = B\overline{C} + \overline{B}C$; $f = AB + B\overline{C} + \overline{B}C$.

Представим заданное уравнение с помощью изображающих чисел следующим образом:

$$+\left\{\begin{array}{l} \&\left\{\begin{array}{lllllllll} \#\varphi_1 = 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \# X = x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}\right. \\ \&\left\{\begin{array}{lllllllll} \#\varphi_2 = 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \# \overline{X} = \overline{x}_0 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 & & \overline{x}_4 & \overline{x}_5 & \overline{x}_6 & \overline{x}_7 \end{array}\right. \\ \hline \# f = 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \qquad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}\right\} \tag{74}$$

Решение уравнения начнём с нулевого минтерма. На наборе 000 (когда $A = B = C = 0$) имеем:

$$1 \cdot x_0 + 0 \cdot \overline{x}_0 = 0.$$

В этом выражении второе слагаемое равно нулю независимо от значения переменной x_0. Чтобы первое слагаемое было равно нулю, необходимо принять $x_0 = 0$. Точно такая же ситуация имеет место в колонке, где находится переменная x_4. Следовательно, $x_0 = x_4 = 0$.

Переходим к минтерму m_1. Для набора 001 имеем:

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot \overline{x}_1 = 1.$$

В каком случае справедливо это равенство? Пусть $x = 0$, тогда равенство сохраняется: $1 \cdot 0 + 1 \cdot \overline{0} = 1$.

Если принять $x = 1$, то равенство также сохраняется:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot \overline{1} = 1.$$

Следовательно, на наборе 001 функция $X(A, B, C)$ не определена (т. е. может принимать любые значения). Точно такая же ситуация имеет место и в колонках x_2, x_5, x_6, откуда следует, что функция $X(A, B, C)$ не определена ещё на трёх наборах 010, 101 и 110.

Рассмотрим колонку минтерма m_3. На наборе 011

$$0 \cdot x_3 + 0 \cdot \overline{x}_3 = 0.$$

Очевидно, что это равенство сохраняется независимо от значения переменной x_3. Следовательно, функция $X(A, B, C)$ не определена и на наборе 011.

Остался один набор 111. Согласно (74) имеем:

$$1 \cdot x_7 + 0 \cdot \overline{x}_7 = 1.$$

Это равенство справедливо лишь при $x_7 = 1$.

Таким образом, искомая функция $X(A, B, C)$ равна нулю на наборах 000 и 100, равна единице на наборе 111 и не определена на пяти наборах: 001, 010, 011, 101, 110. Аналитически эта функция может быть представлена 32 вариантами. Некоторые из них имеют вид:

$$X = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C};$$
$$X = C;$$
$$X = AB \text{ и т.д.}$$

Подстановка любого из 32 решений в исходное уравнение обращает его в тождество.

Упражнения

1. Решите булево уравнение $\varphi_1 \cdot X + \varphi_2 = \varphi_3 + \overline{X}$,

где $\varphi_1 = ABC + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}$; $\varphi_2 = B + A\overline{C}$;

$\varphi_3 = AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$.

(ЦПК). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(ЦБН). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

(ЕЖМ). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

2. Решите уравнение вида $X \cdot \varphi_1 + \overline{X} \cdot \varphi_2 + \varphi_3 = X$,

где $\varphi_1 = AB + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{C}$; $\varphi_2 = B\overline{C}$; $\varphi_3 = \overline{C} + \overline{A}B$.

(ХМ0). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(ЛПП). На каких наборах (в десятичной системе) функция $X(A, B, C)$ равна единице?

(42Р). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

(ЗЫС). Доопределите нулями функцию $X(A, B, C)$ и найдите её минимальную ДНФ.

(ППТ). Доопределите единицами функцию $X(A, B, C)$ и найдите её минимальную ДНФ (буквы ответа упорядочить по алфавиту).

3. Дано булево уравнение вида

$$\overline{B} + AC + \overline{A}\,\overline{C} + X = \overline{B}\,\overline{X} + AC\overline{X} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{X} + A + B\overline{C}.$$

(М0У). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(НЭФ). На каких наборах (в десятичном виде) функция $X(A, B, C)$ принимает нулевое значение?

(НИХ). На каких наборах (в десятичной системе) функция $X(A, B, C)$ равна единице?

(ФУЦ). Найдите самое короткое аналитическое выражение для функции $X(A, B, C)$.

(Д44). Функцию $X(A, B, C)$ доопределите нулями и найдите минимальную ДНФ.

(ФУШ). Функцию $X(A, B, C)$ доопределите единицами и найдите минимальную ДНФ.

8.6. Булевы уравнения с несколькими неизвестными функциями

Для решения уравнения с несколькими неизвестными функциями можно использовать изображающие числа точно так же, как и в случае уравнений с одной неизвестной функцией. Однако при этом необходимо учитывать одну особенность, суть которой поясним на примере простейшего уравнения вида

$$XY = A,$$

где X и Y — функции, зависящие от аргумента A.

Представим уравнение в виде изображающих чисел:

$$\&\begin{array}{rcc} \#X = & x_0 & x_1 \\ \#Y = & y_0 & y_1 \\ \hline \#A = & 0 & 1 \end{array}$$

Поскольку $x_1 y_1 = 1$, то $x_1 = y_1 = 1$.

Для нулевого минтерма имеем:

$$x_0 y_0 = 0.$$

Это равенство справедливо в нескольких случаях. Если принять $x_0 = 0$, то y_0 может принимать любые значения. Если же принять $y_0 = 0$, то x_0 может принимать любые значения. Отсюда следует, что существует три набора значений переменных x_0 и y_0, конъюнкция которых равна нулю: 00, 01, 10. Этим трём наборам соответствуют три решения заданного простейшего уравнения:

$$\begin{cases} X = A \\ Y = A \end{cases} \qquad \begin{cases} X = A \\ Y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 1 \\ Y = A \end{cases}$$

Рассмотрим ещё один такой же простой пример:

$$X + Y = \overline{A}.$$

Пусть базис состоит из аргументов (A, B). Тогда

$$\left.+\begin{array}{rcccc} \#X = & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \#Y = & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline \#\overline{A} = & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\} \qquad (75)$$

Рассмотрим колонку с нулевым минтермом:

$$x_0 + y_0 = 1.$$

Если $x_0 = 1$, то значение y_0 безразлично. Если $y_0 = 1$, то значение x_0 безразлично. Снова тот же случай неоднозначности на трёх наборах значений переменных x_0 и y_0. В данном уравнении это 01, 10, 11, где первая цифра — это значение x_0, вторая — значение y_0. То же самое относится и к колонке с минтермом m_1. В остальных колонках имеем:

$$x_2 + y_2 = 0, \text{ следовательно, } x_2 = y_2 = 0;$$
$$x_3 + y_3 = 0, \text{ следовательно, } x_3 = y_3 = 0.$$

Таким образом, неоднозначность на трёх наборах имеет место в двух колонках. Следовательно, уравнение имеет девять решений.

Если $x_0 = y_0 = 1$, то согласно (75):

$$+\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

В аналитическом виде эти решения имеют вид:

$$\begin{array}{lll} X = \overline{A}; & X = \overline{A}; & X = \overline{A}\,\overline{B}; \\ Y = \overline{A}. & Y = \overline{A}\,\overline{B}. & Y = \overline{A}. \end{array}$$

Если $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, то

$$+\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Отсюда также имеем три варианта:

$$\begin{array}{lll} X = \overline{A}; & X = \overline{A}; & X = \overline{A}\,\overline{B}; \\ Y = \overline{A}B. & Y = 0. & Y = \overline{A}B. \end{array}$$

Остальные три решения получаются, если принять $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$\begin{array}{lll} X = \overline{A}B; & X = \overline{A}B; & X = 0; \\ Y = \overline{A}. & Y = \overline{A}\,\overline{B}. & Y = \overline{A}. \end{array}$$

Рассмотрим более сложный пример. Пусть дано уравнение

$$X + Y\varphi_1 = \varphi_2,$$

где $\varphi_1 = \overline{A}C + \overline{A}\,\overline{B} + AB\overline{C}$; $\varphi_2 = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}$.

Представим это уравнение с помощью изображающих чисел:

$$\begin{array}{rcccccccc} + & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \& & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ \varphi_1 = & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \varphi_2 = & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Найдём значения x_0 и y_0:

$$x_0 + y_0 \cdot 1 = 0.$$

Это равенство справедливо лишь в единственном случае, когда $x_0 = y_0 = 0$. То же самое относится к колонкам с минтермами m_1 и m_6:

$$x_1 = x_6 = y_1 = y_6 = 0.$$

Перейдём к колонке, которой соответствует минтерм m_2:

$$x_2 + y_2 \cdot 0 = 1.$$

Чтобы левая часть этого выражения была равна 1, необходимо принять $x_2 = 1$. Значение y_2 безразлично. То же самое относится к колонкам m_4 и m_7:

$$x_2 = x_4 = x_7 = 1;$$
$$y_2, y_4, y_7 \in \{0,1\}.$$

Рассмотрим колонку пятого минтерма: $x_5 + y_5 \cdot 0 = 0$.

В этом случае имеем: $x_5 = 0$; $y_5 \in \{0,1\}$.

Осталась только одна колонка, соответствующая минтерму m_3:

$$x_3 + y_3 \cdot 1 = 1.$$

Если принять $x_3 = 1$, то $y_3 \in \{0,1\}$. Если же принять $y_3 = 1$, то $x_3 \in \{0,1\}$. Таким образом, на состоянии 011 имеем следующие три случая:

$$x_3 = 0; \quad y_3 = 1;$$
$$x_3 = 1; \quad y_3 = 0;$$
$$x_3 = y_3 = 1.$$

В результате получаем: если не учитывать набор 011, то функция $X(A, B, C)$ не имеет неопределённых состояний, а функция $Y(A, B, C)$ не определена на четырёх наборах т. е. имеет 16 вариантов представления. А так как на наборе 011 существует три способа доопределения, то всего заданное уравнение имеет 48 решений. Запишем некоторые из них. Если $x_3 = 0$, $y_3 = 1$, то

$$\begin{cases} X = ABC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = \overline{A}BC; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = ABC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = \overline{A}B; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = ABC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = BC + A\overline{B} \text{ и т.д. всего 16 решений.} \end{cases}$$

Если $x_3 = 1$, $y_3 = 0$, то

$$\begin{cases} X = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = AC; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \text{ и т.д. всего 16 решений.} \end{cases}$$

Если $x_3 = y_3 = 1$, то

$$\begin{cases} X = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = BC; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = BC + \overline{A}B + A\overline{B}\,\overline{C}; \\ Y = \overline{A}B + A\overline{B} \text{ и т.д. всего 16 решений.} \end{cases}$$

Заданное уравнение превращается в тождество при подстановке в него любого из 48 полученных решений.

Упражнения

1. Дано булево уравнение

$$X + Y = B\overline{C} + AC.$$

(ТГЭ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

(Т5Б). Укажите номера наборов, на которых функция $Y(A, B, C)$ равна нулю.

(УТВ). Сколько решений имеет уравнение?

(ЗАГ). Укажите номера наборов значений переменных A, B, C, на которых неоднозначность характеризуется тремя состояниями.

2. Дано булево уравнение вида

$$X + Y(B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}C) = AB + A\overline{C}.$$

(ВРД). Сколько всего решений имеет уравнение?

(651). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

(ВЛЖ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

(ВРЗ). Укажите номера наборов, на которых функция $Y(A, B, C)$ равна нулю.

(ИШИ). Укажите номера наборов значений переменных A, B, C, на которых неоднозначность характеризуется тремя состояниями.

3. Дано уравнение с тремя неизвестными функциями:

$$XYZ = A + B + C.$$

(576). Сколько решений имеет уравнение?

(ППЛ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

(ЗЗЯ). Найдите минимальную форму функции $Y(A, B, C)$, если известно, что $X(A, B, C) = 0$.

4. (ЯМН). Сколько решений имеет уравнение вида

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 = A + B + C,$$

где X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 — неизвестные функции аргументов A, B, C?

5. Дано булево уравнение вида

$$XYZ = AB + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{C}.$$

(ЫХ0). Сколько решений имеет уравнение?

(ВГП). Укажите номера наборов, на которых функции X, Y, Z необходимо доопределять.

8.7. Ещё раз о формах высших порядков

По своей сути задача повышения порядка функций сводится к решению булевых уравнений с несколькими неизвестными. Эти уравнения образуют особый класс. Во-первых, все они являются односторонними, т. е. в правой их части неизвестных переменных нет. Во-вторых, в левой части находятся только неизвестные переменные (явно заданных функций нет).

Рассмотрим пример, приведённый в подразделе 5.6, где требуется представить в виде конъюнкции двух функций булево выражение $AB + CD$. Очевидно, что задача сводится к решению уравнения вида

$$XY = AB + CD,$$

где X и Y — неизвестные булевы функции, зависящие от аргументов A, B, C, D.

Представим уравнение с помощью изображающих чисел:

$$\& \begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (76)$$

Для первой слева колонки имеем: $x_0 y_0 = 0$.

Это хорошо знакомый случай, когда доопределение осуществляется тремя способами:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \\ x_0 = 0, \quad y_0 = 1; \\ x_0 = 1, \quad y_0 = 0. \end{array}\right\} \qquad (77)$$

То же самое относится и к колонкам с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10. В остальных колонках — полная определённость, например:

$$x_3 y_3 = 1.$$

Очевидно, что это равенство справедливо только при $x_3 = y_3 = 1$.

Таким образом, уравнение (76) содержит неопределённость на девяти наборах значений аргументов A, B, C, D. Так как для каждого из них существует три варианта доопределения, то всего имеем 19683 решений. Чтобы отыскать все эти решения, необходима какая-то система. В данном случае проще всего воспользоваться троичной системой. Перепишем уравнение (76), оставив в нём только неопределённые состояния:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & 1 & x_4 & x_5 & x_6 & 1 & x_8 & x_9 & x_{10} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_0 & y_1 & y_2 & 1 & y_4 & y_5 & y_6 & 1 & y_8 & y_9 & y_{10} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (78)$$

Каждую пару переменных (в колонках) можно доопределить тремя способами, указанными в (77). Сокращённо их будем обозначать 00, 01, 10 или в троичной системе — 0, 1, 2.

Поставим в соответствие колонкам, не содержащим единиц, троичные разряды. Тогда всякий вариант доопределения можно закодировать 9-значным троичным числом. И наоборот, каждому 9-значному троичному числу будет соответствовать некоторый способ доопределения. Систематически перебрав все 19683 троичных чисел и найдя для каждого выражения X и Y, мы получим все возможные решения уравнения (78). Процесс декодирования поясним на примере произвольно выбранного девятизначного троичного числа 122021000 (младший разряд — справа):

$$
\begin{array}{r}
\& \begin{array}{cccccccccccccccc} 0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1. \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccccccccccccccc} 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1 \end{array}
\end{array}
$$

После минимизации получаем:

$$X(A,B,C,D) = AB + CD + \overline{A}D + \overline{A}\,\overline{B}C;$$

$$Y(A,B,C,D) = AB + BC + CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

Необходимо иметь в виду, что число 19683 — это количество решений уравнения, но число вариантов представления выражения $AB + CD$ в виде конъюнкции значительно меньше, так как операция конъюнкции коммутативна. Например, троичное число 211012000 даёт тот же результат, что и число 122021000.

Поиск минимальных выражений среди форм высших порядков также сводится к решению соответствующих булевых уравнений. В общем случае этот процесс состоит из следующих этапов:

а) составляем уравнение и находим все его решения в виде изображающих чисел для каждой неизвестной функции;

б) по изображающим числам получаем минимальные ДНФ (или КНФ);

в) составляем минимальные выражения в заданной форме высшего порядка и для каждого из них находим число вхождений аргументов.

Если в полученном списке найдётся хотя бы одно выражение, имеющее меньшее число вхождений аргументов по сравнению с исходной функцией, то можно считать, что задача решена. Однако такого выражения может и не быть. Тогда необходимо исследовать какую-либо другую форму высшего порядка, затем третью и т. д., пока не найдётся более короткое выражение, чем исходное. Но после этого можно попытаться отыскать вариант с ещё меньшим числом букв и т. д. В результате мы переходим к проблеме абсолютно минимальной формы, которая, как было отмечено в подразделе 5.3, пока не решена.

8.8. Неразрешимые уравнения

Не всякое булево уравнение имеет решение. Рассмотрим, например, такое уравнение:

$$X + AB = C + A\overline{B} + \overline{A}B. \qquad (79)$$

Запишем его с помощью изображающих чисел:

$$
\begin{array}{c}
+\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccccccc} 0&1&1&1&1&1&0&1 \end{array}
\end{array}
$$

Для нулевой колонки имеем: $x_0 + 0 = 0$, следовательно, $x_0 = 0$, т. е. на наборе 000 уравнение разрешимо. На наборах 001, 010, 011, 100, 101 также имеем решения $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$. На наборе 111 функция $X(A, B, C)$ не определена. Остался один набор 110, на котором

$$x_6 + 1 = 0.$$

Это равенство не выполняется ни при каком значении x_6. Следовательно, не существует такой функции, которая обратила бы выражение (79) в тождество, если её подставить вместо X, т. е. уравнение (79) неразрешимо.

Таким образом, уравнение является неразрешимым, если существует хотя бы один набор значений аргументов, на котором отсутствует решение. Это утверждение справедливо для полностью определённых уравнений. Если же уравнение определено не всюду, а функция $X(A, B, C, \ldots)$ не имеет решений на наборах, на которых уравнение не определено, то нет оснований считать, что данное уравнение не имеет решения. Пусть, например, уравнение (79) не определено на наборе 110. Тогда можно считать, что функция $X(A, B, C)$ также не определена на этом наборе. Следовательно, после доопределения получаем четыре решения (на наборе 111 функция $X(A, B, C)$ также не определена):

$$X_1 = A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}C;$$

$$X_2 = C + A\overline{B} + \overline{A}B;$$

$$X_3 = \overline{A}B + \overline{B}C + A\overline{C};$$

$$X_4 = A + B + C.$$

Если любое из этих решений подставить в (79), то получим равенство, имеющее место на всех наборах за исключением набора 110.

Упражнения

1. Дано булево уравнение вида: $X + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = AC.$

(ЕЕМ). Укажите номера наборов, на которых уравнение не имеет решений.

(АЕН). Укажите номера наборов, на которых $X(A, B, C) = 1$.

(ГТ0). Укажите номера наборов, на которых $X(A, B, C) = 0$.

2. Дано булево уравнение

$$(A\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}BC)X + (\overline{B} + AC)\overline{X} = AB + BC.$$

(4ЛБ). Укажите номера наборов, на которых уравнение не имеет решений.

(ШБС). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

(ЯСТ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена, а затем на которых она равна нулю.

3. Уравнение не определено на наборах 1 и 5:

$$(AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B})X = (C + \overline{A}B)\overline{X}.$$

(АКУ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

(0УФ). Сколько существует решений заданного уравнения?

(ТЯХ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

(УХП). Среди минимальных ДНФ для функции $X(A, B, C)$ найдите самое короткое выражение (при вводе его в устройство буквы упорядочьте по алфавиту).

9. ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ

9.1. Основные понятия

Пусть даны n логических аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Поставим в соответствие этим аргументам натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называемые **весами**, и зададим некоторое неотрицательное число T, которое будем называть **порогом**. Условимся считать, что если на каком-либо наборе

$$A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_na_n = \sum_{i=1}^{n} A_ia_i > T, \qquad (80)$$

где знак «+» обозначает арифметическое сложение, то булева функция $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ принимает единичное значение на этом наборе. Если же на каком-либо наборе

$$\sum_{i=1}^{n} A_i a_i \le T, \qquad (81)$$

то функция $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ на этом наборе принимает нулевое значение.

Функцию, представленную описанным способом, будем называть **пороговой функцией**. Записывать её, согласно [4, с. 216], условимся в виде $f = [a_1, a_2, \ldots, a_n; T]$.

Для примера рассмотрим функцию трёх аргументов

$$f(A_1, A_2, A_3) = [3,4,6;5]. \qquad (82)$$

Согласно этой записи имеем:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 4; \quad a_3 = 6; \quad T = 5.$$

Все наборы значений аргументов A_1, A_2, A_3, на которых функция принимает единичное (либо нулевое) значение, можно получить из соотношения вида

$$A_1 \cdot 3 + A_2 \cdot 4 + A_3 \cdot 6 > 5.$$

Если $A_1 = 0;\ A_2 = 0;\ A_3 = 0,$ то $0 < 5$ и $f = 0$.
Если $A_1 = 0;\ A_2 = 0;\ A_3 = 1,$ то $6 > 5$ и $f = 1$.
Если $A_1 = 0;\ A_2 = 1;\ A_3 = 0,$ то $4 < 5$ и $f = 0$.
Если $A_1 = 0;\ A_2 = 1;\ A_3 = 1,$ то $10 > 5$ и $f = 1$.
Если $A_1 = 1;\ A_2 = 0;\ A_3 = 0,$ то $3 < 5$ и $f = 0$.
Если $A_1 = 1;\ A_2 = 0;\ A_3 = 1,$ то $9 > 5$ и $f = 1$.
Если $A_1 = 1;\ A_2 = 1;\ A_3 = 0,$ то $7 > 5$ и $f = 1$.
Если $A_1 = 1;\ A_2 = 1;\ A_3 = 1,$ то $13 > 5$ и $f = 1$.

Таким образом, заданная функция принимает единичное значение на наборах 001, 011, 101, 110, 111. Её минимальная форма имеет вид

$$f = A_1 A_2 + A_3.$$

Для всякой пороговой функции справедливо:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n; T] = [ka_1, ka_2, \ldots, ka_n; kT],$$

где k — натуральное число. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать, согласно (80) и (81):

$$ka_1 A_1 + ka_2 A_2 + \ldots + ka_n A_n > kT;$$
$$ka_1 A_1 + ka_2 A_2 + \ldots + ka_n A_n \le kT.$$

Если обе части неравенств разделить на k, то получим выражения (80) и (81).

Для примера рассмотрим пороговую функцию (82).
Если $k = 2$, то $[3,4,6;5] = [6,8,12;10]$.

Если $k = 3$, то $[3,4,6;5] = [9,12,18;15]$, и т. д.

С практической точки зрения наибольший интерес представляют пороговые функции, для которых имеет минимальное значение выражение

$$L = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + T,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — веса пороговой функции; T — порог.

В общем случае задача отыскания минимальных весов и порога сводится к задаче целочисленного линейного программирования [4, с. 210] и при непосредственном использовании неравенств (80) и (81) представляет собой серьёзную проблему. Чтобы облегчить задачу нахождения пороговой функции (на основе булевой), систему неравенств (80) и (81) следует предварительно упростить. Для этого можно воспользоваться теоремами, главные из которых приведены в данном разделе.

Не всякая булева функция представима в виде пороговой. Если веса и порог являются целыми положительными числами, то для булевой функции, минимальная ДНФ которой содержит инверсные аргументы, пороговых функций не существует. Отсюда следует, что множество булевых выражений, представимых в виде пороговых, полностью входит в класс монотонных булевых функций (монотонной называется функция, не содержащая инверсий в минимальных ДНФ).

Упражнения

1. (ШИФ)! Укажите пороговую величину в записи пороговых функций:

[2, 2, 3, 4; 7]; [1, 2; 4]; [7, 4, 4, 7; 10].

2. Укажите десятичные наборы значений аргументов A_1, A_2, A_3, на которых пороговая функция принимает единичное значение:

(ШМП). [1, 1, 3; 2]; (ЭХС). [1, 7, 4, 5; 12];
(ПХМ). [2, 2, 3; 2]; (Л0Т). [2, 2, 2, 6; 9].

3. Укажите десятичные наборы, на которых пороговая функция принимает нулевое значение:

(ШЗО). [2, 3, 2; 3]; (ЛЕК). [2, 4, 3, 2; 3];
(ЦХР). [6, 7, 6; 6]; (ЗЕУ). [1, 2, 4, 8; 4].

4. Найдите минимальные ДНФ выражений, заданных в виде пороговых функций:

(ЕДО). [3, 4, 4; 3]; (ЕКЖ). [3, 4, 4, 5; 3];
(К0С). [4, 2, 1; 2]; (ЗЫХ). [4, 6, 2, 2; 9].

5. (УЗФ). Укажите все значения a_1, при которых функция $f(A_1, A_2, A_3) = [a_1, 1, 4; 5]$ равна нулю, если принять: $A_1 = A_2 = 1;\ A_3 = 0.$

6. (МИЮ)! Определите число, на которое можно сократить веса и порог функции [3, 6, 9, 3; 6]. Найдите веса и порог функции, получившейся после сокращения.

7. (Ж6Я). Укажите номера минтермов конъюнкции двух пороговых функций [3, 4, 6; 5] и [6, 3, 4; 5], зависящих от одних и тех же аргументов.

8. (235). Укажите номера минтермов дизъюнкции пороговых функций [3, 4, 5; 6] и [5, 3, 4; 4], зависящих от одних и тех же аргументов.

9.2. Функции, определяемые порогом при неизменных весах

В каких пределах может меняться пороговая величина при неизменных весах? Если $T = 0$, то всякая пороговая функция принимает единичное значение на всех наборах значений аргументов за исключением нулевого, на котором функция равна нулю. Минимальная ДНФ такой функции есть дизъюнкция всех её аргументов:

$[a_1, a_2, \ldots, a_n; 0] = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$

Если же порог равен сумме всех весов, то пороговая функция тождественно равна нулю:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n;\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n] \equiv 0.$$

Таким образом, при заданных весах пороговая величина может меняться в пределах

$$0 \le T \le \sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad (83)$$

Заметим, что в системе принятых определений и ограничений пороговую функцию, тождественно равную единице, получить невозможно.

Каждому значению порога из (83) соответствует некоторая пороговая функция. Множество всех этих функций условимся называть P-множеством. Согласно (83) существует M значений пороговой величины:

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1.$$

В общем случае столько же существует и пороговых функций. Всегда ли они различны? Нет, не всегда. Например, сумма весов функции (82) равна 13, следовательно, путём изменения порога от 0 до 13 можно получить 14 функций. Однако различными из них являются лишь 8. Чтобы убедиться в этом, обратимся к табл. 11.

Таблица 11

№	3	4	6	Σ	Значение порога T													
	A_1	A_2	A_3		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	0	0	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

В левой части таблицы перечислены все возможные наборы значений аргументов A_1, A_2, A_3. Над ними указаны веса 3, 4, 6 соответственно. Справа от наборов приведены суммы весов для каждого набора. В остальных правых колонках записаны СДНФ функций для всех значений T. Из таблицы видно, что существует только 8 различных функций. Минимальные ДНФ их имеют вид:

$$f_0 = f_1 = f_2 = A_1 + A_2 + A_3;$$
$$f_3 = A_2 + A_3;$$
$$f_4 = f_5 = A_1A_2 + A_3;$$
$$f_6 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_1A_3;$$
$$f_7 = f_8 = A_2A_3 + A_1A_3;$$
$$f_9 = A_2A_3;$$
$$f_{10} = f_{11} = f_{12} = A_1A_2A_3;$$
$$f_{13} = 0.$$

Примером, когда число всех функций P-множества равно M, может служить пороговая функция [2, 1, 4; T]. Для этой функции имеем:

$$M = 2 + 1 + 4 + 1 = 8.$$

Столько же существует и функций, среди которых нет одинаковых. Их полный список имеет вид:

$f_0 = A_1 + A_2 + A_3;$ $\quad f_4 = A_1A_3 + A_2A_3;$

$f_1 = A_1 + A_3;$ $\quad f_5 = A_1A_3;$

$f_2 = A_1A_2 + A_3;$ $\quad f_6 = A_1A_2A_3;$

$f_3 = A_3;$ $\quad f_7 = 0.$

Упражнения

1. (671). Укажите все значения, которые может принимать порог, если веса пороговой функции четырёх аргументов одинаковы и равны 1.

2. Постройте таблицу для всех значений порога. Веса равны 2, 4, 6.

(А12)! Сколько различных функций в таблице? Сколько значений может принимать порог?

(ЛЯЗ)! Сколько единиц в строке 2 правой части таблицы? Сколько единиц в строке 3? (ВНИ)! Сколько минтермов содержит функция, если порог равен 4? Если порог равен 6?

(225). При каком наименьшем значении порога функция равна нулю?

(196). Укажите все значения порога, при которых функция имеет вид $f = ABC$.

(157). Укажите все значения порога, при которых функция имеет вид

$$f = A + B + C.$$

(АРМ). Укажите все значения порога, при которых пороговая функция имеет вид $f = AB + C$.

(ББН). Укажите все значения порога, при которых инверсия пороговой функции имеет вид $\bar{f} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$.

3. (ОКО). Укажите номера верных утверждений:

1) если пороговая функция зависит от пяти аргументов, то порог не может быть меньше пяти;

2) если пороговая функция зависит от шести аргументов, то порог может быть равным шести;

3) при любых весах можно найти такой порог, что пороговая функция, зависящая от аргументов $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, будет равна дизъюнкции этих аргументов;

4) если веса образуют ряд $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n$, то порог может принимать 2^{n+1} различных значений;

5) если веса образуют ряд $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n$, то порог может принимать 2^n различных значений;

6) если веса пороговой функции f равны: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, а порог $T = a - 1$, то $f = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

9.3. Теоремы о пороговых функциях

В данном подразделе сформулированы четыре теоремы, на которых базируется алгоритм представления аналитического булева выражения в виде пороговой функции. Доказательства теорем не приведены, их можно найти в [4, с. 210—213].

Пусть дана пороговая функция $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; T]$. Представим её в СДНФ. Пусть k_i — число минтермов, в которые логический аргумент A_i входит в неинверсной форме $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 1. Если $a_i = a_j$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i \neq j)$, то $k_i = k_j$.

Для примера рассмотрим функцию [3, 2, 4, 3; 5]. Её СДНФ имеет вид

$$f = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2A_3A_4. \tag{84}$$

В заданной пороговой функции $a_1 = a_4$. В СДНФ имеется шесть минтермов, в которые аргумент A_1 входит в неинверсной форме. Это минтермы 9, 10, 11, 13, 14, 15 ($k_1 = 6$). Аргумент A_4 без инверсий также входит в шесть минтермов, номера которых 3, 7, 9, 11, 13, 15 ($k_4 = 6$).

Таким образом, если веса равны, то равны и числа, показывающие, сколько минтермов содержат соответствующие логические аргументы в неинверсной форме.

Теорема 2. Если $k_i > k_j$, то для любой пороговой функции выполняется условие $a_i > a_j$.

Проиллюстрируем теорему на примере функции, СДНФ которой имеет вид (84). Неинверсный аргумент A_1 входит в шесть минтермов, следовательно, $k_1 = 6$. Аналогично находим: $k_2 = 5$, $k_3 = 7$, $k_4 = 6$. Если перебрать все пары k_i, k_j, где $k_i > k_j$, и под ними записать все пары a_i, a_j, где $a_i > a_j$, то получим:

$$k_1 > k_2,\quad k_3 > k_1,\quad k_3 > k_2,\quad k_3 > k_4,\quad k_4 > k_2;$$
$$a_1 > a_2,\quad a_3 > a_1,\quad a_3 > a_2,\quad a_3 > a_4,\quad a_4 > a_2.$$

Рассмотрим первую пару. Аргумент A_1 входит в неинверсном виде в шесть минтермов, а аргумент A_2 — в пять, т. е. $k_1 > k_2$. Согласно теореме 2 имеем: $a_1 > a_2$ (так как $a_1 = 3$, $a_2 = 2$). Теорема на этой паре справедлива. То же самое относится и ко всем остальным парам.

Теорема 3. Если при $k_i = k_j$ пороговая функция равна единице на наборе

$$c = c_1\ c_2\ \ldots\ c_{i-1}\ 0\ c_{i+1}\ \ldots\ c_{j-1}\ 1\ c_{j+1}\ \ldots\ c_n,$$

то она равна единице и на наборе

$$c = c_1\ c_2\ \ldots\ c_{i-1}\ 1\ c_{i+1}\ \ldots\ c_{j-1}\ 0\ c_{j+1}\ \ldots\ c_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — двоичные цифры набора.

Поясним теорему на примере выражения (84), где $k_1 = k_4$. На наборе 0011 функция равна единице. Поменяем местами первую и последнюю цифры. Получим набор 1010, на котором функция равна единице. Переставим местами первую и последнюю цифры в наборе 0111, получим 1110. На этом наборе функция также равна единице.

Теорема 4. Если $k_i = k_j$, то можно принять $a_i = a_j$.

Эта теорема является обратной по отношению к теореме 1, поэтому пояснять её примером не будем.

Упражнения

1. (КЛО)! Дана пороговая функция вида [3, 5, 3, 1, 2; 6]. Известно, что аргумент A_1 входит в 11 минтермов этой функции. Найдите число минтермов, в каждый из которых входит аргумент A_3. Укажите номер теоремы, при помощи которой можно быстро найти ответ.

2. (ХРО). Дана пороговая функция [4, 3, 5, 3; 6]. Укажите значения k_1, k_2, k_3, k_4.

3. (РАФ). Дана пороговая функция [3, 2, 5, 6; 7]. Поставьте знаки >, <, = между k_i и k_j:

$$k_1 \ldots k_2;\quad k_1 \ldots k_3;\quad k_1 \ldots k_4;\quad k_2 \ldots k_3;\quad k_2 \ldots k_4;\quad k_3 \ldots k_4.$$

4. (ШИ4). Дана пороговая функция [4, 2, 5, 7; 8]. Расставьте знаки >, <, = между весовыми коэффициентами:

$$a_1 \ldots a_2;\quad a_1 \ldots a_3;\quad a_1 \ldots a_4;\quad a_2 \ldots a_3;\quad a_2 \ldots a_4;\quad a_3 \ldots a_4.$$

5. (УН0). Известно, что некоторая пороговая функция с равными весами на наборе 0011 равна единице, а на наборе 0001 равна нулю. Укажите десятичные эквиваленты других наборов, на которых эта функция также равна единице. Перед вводом в устройство числа упорядочить по возрастанию. Заданный набор 0011, т. е. число 3, не вводить.

6. (ЗЛЯ). Весовые коэффициенты пороговой функции четырёх аргументов связаны следующим образом:

$$a_1 = a_3 = a_4 > a_2.$$

Известно, что эта функция на наборе 0001 равна единице. Укажите все десятичные эквиваленты наборов, на которых функция равна нулю, если порог равен a_2.

7. (АСУ). Весовые коэффициенты пороговой функции четырёх аргументов связаны следующим образом:

$$a_1 = a_2 = a_4 < a_3.$$

Известно, что функция на наборе 1100 равна единице, а на наборе 0001 равна нулю. Укажите десятичные эквиваленты других наборов, на которых функция также равна нулю. Набор 0001 не вводить.

8. (ФИН). Укажите номера верных утверждений:

1) если $k_i = k_j$, то не всегда $a_i = a_j$;

2) если $k_i = k_j$, то $a_i = a_j$;

3) если $a_i = a_j$, то возможны случаи, когда $k_i \neq k_j$;

4) если $k_i = k_j$, то в некоторых случаях $a_i \neq a_j$.

5) если $a_i = a_j$, то всегда $k_i = k_j$;

6) если $a_i = a_j$, то не всегда $k_i = k_j$.

9.4. Нахождение пороговых функций

Пусть дана некоторая булева функция. Выясним, каким образом можно найти тождественно равную ей пороговую функцию.

Метод нахождения пороговых функций состоит в следующем:

1) определяем числа k_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$; n — число аргументов заданной булевой функции;

2) устанавливаем соотношения между весами искомой пороговой функции по правилам: если $k_i = k_j$, то $a_i = a_j$ (согласно теореме 1); если $k_i > k_j$, то $a_i > a_j$ (согласно теореме 2);

3) находим минимальную ДНФ заданной функции;

4) составляем систему неравенств в соответствии с выражением (80). Исключаем лишние неравенства;

5) находим минимальную ДНФ инверсии заданной функции;

6) составляем систему неравенств в соответствии с выражением (81). Так как функция проинвертирована, то при составлении неравенств необходимо ориентироваться на те буквы, которые отсутствуют в простых импликантах минимальной ДНФ инверсии заданной функции. Исключаем лишние неравенства;

7) решаем систему неравенств.

Пример. Найти веса и порог булевой функции, представленной в СДНФ,

$$f(A_1, A_2, A_3, A_4) = (3,5,6,7,10,11,13,14,15):$$

1) определяем числа k_1, k_2, k_3 и k_4 (например, при помощи карты Вейча):

$$k_1 = 5;\qquad k_2 = 6;\qquad k_3 = 7;\qquad k_4 = 6;$$

2) на основании теорем 1 и 2 получаем:

$$k_1 < k_2 = k_4 < k_3. \tag{85}$$

Следовательно, $a_1 < a_2 = a_4 < a_3$;

3) находим минимальную ДНФ заданной функции:

$$f = A_1A_3 + A_2A_4 + A_2A_3 + A_3A_4;$$

4) составляем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 > T; \\ a_2 + a_4 > T; \\ a_2 + a_3 > T; \\ a_3 + a_4 > T. \end{cases}$$

Анализируем систему. Третье неравенство можно удалить, так как если $a_1 + a_3 > T$, то выполняется и неравенство $a_2 + a_3 > T$, поскольку $a_2 > a_1$. Аналогично рассуждая, убеждаемся, что четвёртое выражение также является лишним и его можно удалить. В результате получаем упрощенную систему:

$$a_1 + a_3 > T;\qquad a_2 + a_4 > T;$$

5) находим минимальную ДНФ инверсии функции:

$$\bar{f} = \bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_4;$$

6) составляем систему неравенств. Первая простая импликанта, входящая в функцию $\bar{f}$, равна $\bar{A}_2\bar{A}_3$. В неё не входят аргументы A_1 и A_4. Следовательно, первое неравенство примет вид $a_1 + a_4 \le T$. Аналогично находим и остальные два неравенства. В результате получаем:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 \le T; \\ a_1 + a_2 \le T; \\ \qquad a_3 \le T. \end{cases}$$

Второе неравенство можно удалить, так как $a_2 = a_4$, и, следовательно, первое неравенство равно второму. В результате вместо трёх неравенств получаем два неравенства вида $a_1 + a_4 \le T$ и $a_3 \le T$;

7) решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 > T; \\ a_2 + a_4 > T; \\ a_1 + a_4 \le T; \\ \quad a_3 \le T. \end{cases}$$

Учитывая соотношение (85), запишем:

$$a_2 = a_4 = a_1 + \tau_1;$$
$$a_3 = a_1 + \tau_1 + \tau_2,$$

тогда система неравенств примет вид

$$\begin{cases} 2a_1 + \tau_1 + \tau_2 > T; \\ 2a_1 + 2\tau_1 + \tau_2 > T; \\ 2a_1 + \tau_1 \le T; \\ a_1 + \tau_1 + \tau_2 \le T. \end{cases}$$

Пусть $\tau_1 = \tau_2 = 1$, тогда

$$\begin{cases} 2a_1 + 2 > T; \\ 2a_1 + 3 > T; \\ 2a_1 + 1 \le T; \\ a_1 + 2 \le T. \end{cases}$$

Примем $a_1 = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 4 > T; \\ 3 \le T. \end{cases}$$

Следовательно, $T = 3$. Находим коэффициенты:

$$a_2 = a_4 = 1 + 1 = 2;$$
$$a_3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Таким образом, получили искомую пороговую функцию в виде [1, 2, 3, 2; 3].

Для проверки найденную пороговую функцию снова представим в виде булевой. Обратимся к табл. 12. В ней знаком Σ обозначена колонка, в которой для каждого набора значений аргументов указана сумма весов. В колонке f единицами отмечены суммы, превышающие порог 3. Если не учитывать колонку Σ, то всю таблицу можно рассматривать как таблицу соответствия. Тогда получаем

$$f = (3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15).$$

Это и есть заданная функция.

Таблица 12

№	A_1	A_2	A_3	A_4	Σ	f
	1	2	3	2		
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	2	
2	0	0	1	0	3	
3	0	0	1	1	5	1
4	0	1	0	0	2	
5	0	1	0	1	4	1
6	0	1	1	0	5	1
7	0	1	1	1	7	1
8	1	0	0	0	1	
9	1	0	0	1	3	
10	1	0	1	0	4	1
11	1	0	1	1	6	1
12	1	1	0	0	3	
13	1	1	0	1	5	1
14	1	1	1	0	6	1
15	1	1	1	1	8	1

Упражнения

1. Укажите величины k_1, k_2, k_3, k_4 для функций вида:

(07Р). $f = AB + AC + BCD$;

(АТС). $f = A_1A_3 + A_2A_3A_4$;

(ВТТ). $f = (3,5,7,11,13,14,15)$.

2. (ППУ). Дана пороговая функция вида [1, 3, 5, 4; 5]. Расставьте знаки >, <, = между величинами k_i $(i = 1,2,3,4)$:

$$k_1 \ldots k_2;\quad k_1 \ldots k_3;\quad k_1 \ldots k_4;\quad k_2 \ldots k_3;\quad k_2 \ldots k_4;\quad k_3 \ldots k_4.$$

3. (2ФФ). Дана система неравенств:

1) $a_1 + a_2 > T$; 3) $a_2 + a_3 > T$;

2) $a_1 + a_2 + a_3 > T$; 4) $a_1 + a_3 > T$.

Укажите номера лишних неравенств, если

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4, \quad a_1 > 0.$$

4. Найдите веса и порог булевых функций вида:

(КТМ). $f = (6, 7, 11, 12, 13, 14, 15)$;

(ОЯН). $f = (7, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$.

9.5. Мажоритарные функции

Мажоритарные функции представляют собой особый класс пороговых функций, отличающихся следующими особенностями:

а) число аргументов, от которых зависит мажоритарная функция, может быть только нечётным;

б) веса всех аргументов равны между собой, в связи с чем их удобно принять равными единице;

в) порог равен (при единичных весах):

$$T = \frac{n-1}{2},$$

где n — число аргументов мажоритарной функции.

Таким образом, мажоритарная функция равна единице в том случае, если большинство её аргументов принимают единичное значение. Пусть $n = 3$. Тогда при $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ порог также равен 1 и мажоритарная функция принимает вид

$$f = [1, 1, 1;\ 1].$$

Эта функция равна единице на четырёх наборах значений аргументов: 011, 101, 110, 111 и равна нулю на остальных четырёх наборах: 000, 001, 010, 100. Минимальная ДНФ её имеет вид

$$f = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3.$$

Если $n = 4$, то порог равен 2,5, т. е. получается дробная величина. Очевидно, что дробный порог получается при любом чётном n, следовательно, мажоритарных функций с чётным числом аргументов не существует.

При $n = 5$ имеем:

$$f = [1, 1, 1, 1, 1;\ 2].$$

Эта функция принимает единичное значение на 16 наборах, среди которых 10 наборов, содержащих по три единицы: 00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100; пять наборов — по четыре единицы: 11110, 11101, 11011, 10111, 01111 и один набор, состоящий из пяти единиц. Если функцию минимизировать, то в классе ДНФ получим:

$$f = A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_1A_2A_5 + A_1A_3A_4 + A_1A_3A_5 +$$
$$+ A_1A_4A_5 + A_2A_3A_4 + A_2A_3A_5 + A_2A_4A_5 + A_3A_4A_5.$$

В общем случае всякая мажоритарная функция принимает единичное значение на половине всех наборов, в чём нетрудно убедиться, если воспользоваться известным соотношением:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n, \qquad (86)$$

где C_n^i — число сочетаний без повторений из n по i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$):

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-i)}.$$

Левая часть выражения (86) обладает своеобразной симметрией: его первое слагаемое равно последнему, второе — предпоследнему и т. д. Всего ряд содержит $n + 1$ членов. Это чётное число (поскольку n нечётно). Следовательно, сумма первых $(n + 1)/2$ членов равна сумме всех последних $(n + 1)/2$ слагаемых:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{\frac{n-3}{2}} + C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}} + C_n^{\frac{n+3}{2}} + \ldots + C_n^n. \qquad (87)$$

Если n — число всех разрядов двоичного набора значений аргументов, а 0, 1, 2, …, n — число единиц, входящих в наборы, то очевидно, что левая часть равенства (87) показывает, сколько существует n-разрядных двоичных чисел, содержащих большинство нулей, а правая часть есть число, показывающее, сколько существует n-значных двоичных наборов, в каждом из которых единиц больше, чем нулей. Отсюда следует, что всякая мажоритарная функция единичное значение принимает ровно на половине всех возможных наборов значений аргументов.

Минимизировать мажоритарные функции можно любым методом, но в этом нет необходимости, поскольку структуру минимальной ДНФ всякой мажоритарной функции легко найти, ориентируясь лишь на её особенности, перечисленные в начале данного подраздела. Если функция зависит от n аргументов, то каждая конъюнкция, входящая в минимальную ДНФ, содержит $(n + 1)/2$ букв, а число самих конъюнкций равно

$$r = C_n^{\frac{n+1}{2}}.$$

Например, если $n = 9$, то минимальная ДНФ имеет вид

$$f = A_1A_2A_3A_4A_5 + A_1A_2A_3A_4A_6 + \ldots + A_5A_6A_7A_8A_9,$$

т. е. её конъюнкции содержат по 5 аргументов, а число конъюнкций, дизъюнкция которых образует данную минимальную ДНФ, равно

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126.$$

Каждая конъюнкция представляет собой набор пяти аргументов из девяти заданных, следовательно, конъюнкции отличаются одна от другой только самими аргументами (поскольку в них нет ни одной инверсной переменной).

Упражнения

1. (0АБ). Укажите номера минтермов, дизъюнкция которых равна мажоритарной функции [1, 1, 1; 1].

2. (ЯМВ)! Укажите порог мажоритарной функции 15 аргументов, 21 аргумента, 39 аргументов.

3. (ЯКГ). Порог мажоритарной функции равен 12. Найдите число аргументов этой функции.

4. (КНД). Мажоритарная функция равна единице на 16 наборах значений аргументов. Найдите число её аргументов и пороговую величину.

5. (ТАФ). Мажоритарная функция равна нулю на 64 наборах. Найдите число вхождений аргументов в её минимальную ДНФ.

6. (ББЖ). Порог мажоритарной функции равен 4. Сколько конъюнкций содержит минимальная ДНФ этой функции?

7. (ТЭЗ). Каждая конъюнкция минимальной ДНФ мажоритарной функции содержит 6 аргументов. Найдите порог и число аргументов, от которых зависит функция.

8. (ФАИ). Укажите номера мажоритарных функций:

1) $f = [1,1,1,1,1;\ 2]$;
2) $f = [1;\ 1]$;
3) $f = [1;\ 0]$;
4) $f = [1,1,1,1,1;\ 3]$;
5) $f = [1,1,1,1,1,1;\ 3]$;
6) $f = [1,1,1,1,1,1,1;\ 3]$.

9. (ГНИ). Минимальная ДНФ мажоритарной функции содержит 35 конъюнкций. Найдите число её аргументов и порог.

10. (ШКК). Определите число вхождений аргументов в минимальную ДНФ мажоритарной функции, которая равна нулю на 256 наборах.

9.6. Симметрические мажоритарные функции

Всякая мажоритарная функция с единичными весами и порогом $(n - 1)/2$ является симметрической. Например, мажоритарная функция вида [1, 1, 1, 1, 1; 2] принимает единичное значение в трёх случаях:

а) когда число аргументов с единичными значениями равно 3;

б) когда число аргументов с единичными значениями равно 4;

в) когда все аргументы равны единице.

Каждому из этих трёх случаев соответствует симметрическая функция с одиночным a-числом:

а) $f_1 = S_3(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$;

б) $f_2 = S_4(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$;

в) $f_3 = S_5(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Очевидно, что дизъюнкция симметрических функций f_1, f_2, f_3 равна заданной мажоритарной функции:

$$[1,1,1,1,1;\ 2] = S_3 + S_4 + S_5 = S_{3,4,5},$$

где буквой S обозначены симметрические функции пяти аргументов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (см. раздел 6).

Рассмотрим общий случай, когда мажоритарная функция зависит от n аргументов. Эта функция принимает единичное значение в том случае, если большинство аргументов равно единице. Следовательно,

$$\left[1, 1, \ldots, 1;\ \frac{n-1}{2}\right] = f_1 + f_2 + \ldots + f_k,$$

где $k = \dfrac{n+1}{2}$; $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — симметрические функции:

$$f_1 = S_{\frac{n+1}{2}}(A_1, A_2, \ldots, A_n);$$

$$f_2 = S_{\frac{n+3}{2}}(A_1, A_2, \ldots, A_n);$$

. . . .

$$f_k = S_n(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Таким образом, мажоритарная функция n аргументов может быть представлена симметрической функцией, a-числа которой образуют ряд:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ \ldots\ , \frac{n+n}{2} = n.$$

Например, если $n = 9$, то мажоритарная функция f представится в виде $f = S_{5,6,7,8,9}(A_1, A_2, \ldots, A_9)$.

Упражнения

1. (АЯР). Укажите a-числа симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции с порогом 5.

2. (ПЗС). Порог мажоритарной функции равен 9. Укажите число аргументов, от которых зависит функция, и количество a-чисел симметрической функции, тождественно равной заданной мажоритарной функции.

3. (Б0Т). Симметрическая функция, тождественно равная мажоритарной функции f, содержит 6 a-чисел. Найдите число аргументов функции f и её порог.

4. (731). Наименьшее a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции f, равно 4. Найдите число аргументов функции f и её порог.

5. (БАК). Третье по возрастанию a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции f, равно 9. Найдите число аргументов функции f и её порог.

6. (ПЦХ). Наибольшее a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции, равно 21. Найдите наименьшее a-число симметрической функции и определите порог мажоритарной функции.

7. (ТЦЦ). Минимальная ДНФ мажоритарной функции f содержит 140 вхождений аргументов. Найдите a-числа симметрической функции, тождественно равной f.

8. (ВЕЧ). Четвёртое по возрастанию a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции f, равно 7. Найдите число вхождений аргументов минимальной ДНФ функции f.

10. БУЛЕВО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

10.1. Аксиомы алгебры Жегалкина

Жегалкин Иван Иванович — профессор МГУ, специалист по математической логике (1869—1947).

Преобразования, связанные с нахождением производных булевых функций, осуществляются главным образом с использованием **алгебры Жегалкина**. Поэтому, прежде чем рассматривать правила дифференцирования булевых функций, необходимо выяснить, что такое алгебра Жегалкина и как переводить её формулы в булеву алгебру и наоборот.

Исходные положения алгебры Жегалкина рассмотрим по аналогии с тем, как это было сделано в разделе 1 по отношению к булевой алгебре, т. е. введём аксиомы, определяющие операции в алгебре Жегалкина. Всего в этой алгебре две операции — **конъюнкция** и **сумма (сложение) по модулю два** (которую называют также операцией «неравнозначно», «исключающее ИЛИ», «разность»). Аксиомы, определяющие конъюнкцию, даны в разделе 1, поэтому здесь приведём лишь аксиомы, относящиеся к операции сложения по модулю два. Для её обозначения используется знак ⊕ (знак плюс, вписанный в круг), записываемый между аргументами: $A \oplus B$. Определяется сумма по модулю два следующими аксиомами:

$$0 \oplus 0 = 0; \tag{88}$$

$$0 \oplus 1 = 1; \tag{89}$$

$$1 \oplus 0 = 1; \tag{90}$$

$$1 \oplus 1 = 0. \tag{91}$$

Этот список отличается от аксиом для дизъюнкции только одним выражением, последним: если в булевой алгебре $1+1=1$, то в алгебре Жегалкина $1 \oplus 1 = 0$.

При помощи аксиом легко вычислить значение любого выражения Жегалкина по известным значениям аргументов. Вычислим, например, значение выражения

$$A \oplus BC \oplus AC, \tag{92}$$

если $A=1, B=0, C=1$. Для этого подставим в заданное выражение вместо переменных их значения:

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1.$$

После выполнения операций конъюнкции имеем:

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1.$$

Согласно аксиоме (90): $1 \oplus 0 = 1$, тогда

$$1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \oplus 1.$$

В соответствии с аксиомой (91) имеем: $1 \oplus 1 = 0$.

Таким образом, выражение (92) на наборе значений аргументов 101 имеет нулевое значение.

Операция суммы по модулю два обладает коммутативностью: $A \oplus B = B \oplus A$ и ассоциативностью:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C),$$

что позволяет записывать суммы нескольких аргументов без скобок и в любом порядке:

$$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = A \oplus B \oplus C \oplus D = B \oplus A \oplus C \oplus D.$$

Справедливость обоих свойств легко доказать при помощи аксиом (88)—(91) методом полного перебора по аналогии с тем, как это сделано в разделе 1 относительно булевых выражений.

В алгебре Жегалкина конъюнкция дистрибутивна относительно суммы по модулю два:

$$A(B \oplus C) = AB \oplus AC,$$

что позволяет раскрывать скобки и выносить за скобки как отдельные переменные, так и любые выражения.

Но в отличие от булевой алгебры дистрибутивность суммы по модулю два относительно конъюнкции в алгебре Жегалкина места не имеет:

$$A \oplus BC \neq (A \oplus B)(A \oplus C).$$

Например, если $A=1, B=0, C=1$, то

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \neq (1 \oplus 0)(1 \oplus 1).$$

Упражнения

1. Найдите значения следующих выражений:

(ХРР)! $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$; $0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$; $1 \oplus 1 \oplus 0$;

(АОС)! $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$; $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$; $0 \oplus 1 \oplus 1$.

2. Укажите значения следующих выражений, если $A = B = 1$, $C = 0$:

(ШУТ)! $A \oplus B \oplus C$; $AB \oplus C$; $AC \oplus B$;

(УПУ)! $B \oplus C \oplus AB$; $ABC \oplus AB$; $A \oplus AB \oplus ABC$.

3. (УШФ). Укажите номера выражений, равных нулю, если $A = B = 0$, $C = D = 1$:

1) $AB \oplus ABC \oplus ABCD$;
2) $A \oplus B \oplus CD \oplus D \oplus AD$;
3) $A \oplus BCD \oplus B \oplus CD$;
4) $B \oplus C \oplus D \oplus BCD$;
5) $BC \oplus AC \oplus CD \oplus C \oplus D$;
6) $B \oplus C \oplus D \oplus CD \oplus A \oplus AC$.

10.2. Перевод булевых выражений в алгебру Жегалкина и наоборот

Основные соотношения, связывающие три операции булевой алгебры с двумя операциями алгебры Жегалкина, имеют вид

$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B; \tag{93}$$

$$A + B = A \oplus B \oplus AB. \tag{94}$$

Из этих формул выводятся следующие важные частные случаи:

а) пусть $B = 1$, тогда из формулы (93) получаем:

$$A \oplus 1 = \overline{A}, \tag{95}$$

т. е. инверсия некоторого булева выражения в алгебре Жегалкина представляется как сумма по модулю два этого выражения и единицы;

б) из формулы (94) следует, что если $AB = 0$, то

$$A + B = A \oplus B; \tag{96}$$

в) пусть $A = B$, тогда

$$A \oplus A = 0. \tag{97}$$

Это положение распространяется и на большее число переменных:

$A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = 0$ при чётном числе букв;

$A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = A$ при нечётном числе букв.

С помощью формул (93)—(96) всякое булево выражение можно представить в алгебре Жегалкина и наоборот, всякое выражение Жегалкина можно перевести в булеву алгебру.

Упрощение формул в алгебре Жегалкина осуществляется в основном с помощью соотношения (97).

Пример 1. Представить в алгебре Жегалкина булево выражение $f = AB + \overline{A}C$.

Поскольку конъюнкция слагаемых равна нулю, т. е. $AB \cdot \overline{A}C = 0$, то

$$f = AB + \overline{A}C = AB \oplus \overline{A}C.$$

По формуле (95) получаем:

$$f = AB \oplus \overline{A}C = AB \oplus C \oplus AC.$$

Пример 2. Представить в алгебре Жегалкина булево выражение

$$f = AB + BC\,.$$

В этом выражении конъюнкция слагаемых не равна нулю, т. е. $AB \cdot BC \neq 0$, следовательно, по формуле (94):

$$f = AB + BC = AB \oplus BC \oplus ABC.$$

Пример 3. Представить в булевой алгебре выражение Жегалкина

$$f = AB \oplus AC \oplus BC \oplus ABC.$$

Вынесем за скобки AB и аргумент C:

$$f = AB(1 \oplus C) \oplus C(A \oplus B) = AB\overline{C} \oplus C(A \oplus B).$$

По выражению (93) имеем:

$$f = AB\overline{C} \oplus C(A \oplus B) = AB\overline{C} \oplus C(A\overline{B} + \overline{A}B) =$$
$$= AB\overline{C} \oplus (A\overline{B}C + \overline{A}BC)\,.$$

Заметим, что $AB\overline{C} \cdot (A\overline{B}C + \overline{A}BC) = 0$, т. е. конъюнкция слагаемых равна нулю, следовательно, по формуле (96) получаем искомый результат:

$$f = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC.$$

Пример 4. Упростите в алгебре Жегалкина:

$$f = AB \oplus ABC \oplus BC \oplus ABC \oplus BC \oplus ABC \oplus AB \oplus AC.$$

В этом выражении два раза встречается конъюнкция AB, два раза — конъюнкция BC и три раза — конъюнкция ABC. По формуле (97) имеем:

$$AB \oplus AB = 0;\; BC \oplus BC = 0;\; ABC \oplus ABC \oplus ABC = ABC.$$

С учётом этих значений минимальная форма заданного выражения принимает вид

$$f = ABC \oplus AC.$$

Упражнения

1. Упростите в алгебре Жегалкина:

(РЭФ). $f = ABC \oplus BC \oplus AB \oplus BC \oplus BC \oplus AB \oplus BC$;

(КЫХ). $f = (A \oplus B)(BC \oplus AC) \oplus ABC \oplus AC \oplus ABC$;

(КАЗ). $f = (A \oplus B)(AB \oplus AC) \oplus ABC$;

(А0И). $f = (AC \oplus AB \oplus BC)(AB \oplus BC) \oplus AB$.

2. Представьте булево выражение в алгебре Жегалкина и упростите (при вводе ответа в устройство «Символ» вместо знака «$\oplus$» использовать знак «+»):

(А15). $f = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$;

(556). $f = AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}C$;

(427). $f = \overline{A}BC + A\overline{C} + A\overline{B}$.

3. Найдите минимальные ДНФ в булевой алгебре по заданным выражениям Жегалкина:

(РУМ). $f = B(1 \oplus A) \oplus AB \oplus C \oplus BC$;

(589). $f = A \oplus C \oplus BC \oplus AC \oplus ABC$;

(ЕВ0). $f = C \oplus AC \oplus ABC \oplus 1$.

4. (ФУП). Укажите номера функций, которые не изменятся, если в них знаки «+» заменить знаками «$\oplus$»:

1) $f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C$; 4) $f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C$;

2) $f = BC + \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{C}$; 5) $f = \overline{A + B} + BC + A\overline{C}$;

3) $f = A + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}C$; 6) $f = AC + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$.

5. (000). Укажите номера верных равенств:

1) $A\overline{B} \oplus A\overline{C} \oplus B\overline{C} = A\overline{B} + A\overline{C} + B\overline{C}$;

2) $A + B + AB = A \oplus B \oplus AB$;

3) $AB \oplus \overline{A}B \oplus \overline{B}C = B + C + BC$;

4) $A\overline{B} + C = A \oplus AB \oplus C$;

5) $AB \oplus BC \oplus AC = AB + BC + AC$;

6) $\overline{A}\,\overline{C} + AC + \overline{A}BC = \overline{A}\,\overline{C} \oplus AC \oplus \overline{A}BC$.

6. Укажите десятичные номера двоичных наборов, на которых значения функций f_1 и f_2 не совпадают:

(ЭЯЯ). $f_1 = AB + \overline{A}BC + \overline{B}C$; $f_2 = AB \oplus C$;

(ТТМ). $f_1 = A + B + \overline{C}$; $f_2 = A \oplus AB \oplus ABC$;

(ЛЫС). $f_1 = A + AB + ABC$; $f_2 = A \oplus B \oplus C$;

(ТВУ). $f_1 = (A + B)(B + C)$; $f_2 = (A \oplus B)(B \oplus C)$.

10.3. Применение карт Вейча в алгебре Жегалкина

Сначала выясним, как найти наборы значений аргументов, на которых функция Жегалкина принимает единичное значение. Чтобы ответить на этот вопрос, заданную функцию достаточно представить в СДНФ, поскольку двоичные индексы минтермов и являются искомыми наборами. Для нахождения СДНФ функцию из алгебры Жегалкина сначала можно перевести в булеву алгебру, а затем найти соответствующую сумму минтермов. Однако для нахождения СДНФ существует более простой путь, заключающийся в том, что заданная функция Жегалкина записывается в СДНФ непосредственно, минуя перевод в булеву алгебру. Возможность этого обеспечивает следующее свойство минтермов: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, равна нулю (см. подраздел 2.3). Следовательно, согласно (96) функция не изменится, если в её СДНФ знаки «+» заменить на «$\oplus$» (либо наоборот).

Пусть дана функция Жегалкина, зависящая от трёх аргументов A, B, C:

$$f = AB \oplus AC \oplus C.$$

Представим её в СДНФ, но сначала все преобразования выполним аналитически.

Запишем каждую конъюнкцию заданной функции в виде суммы минтермов:

$$AB = AB\overline{C} \oplus ABC;$$
$$AC = A\overline{B}C \oplus ABC;$$
$$C = \overline{A}\overline{B}C \oplus \overline{A}BC \oplus A\overline{B}C \oplus ABC.$$

Их сумма по модулю два имеет вид:

$$f = AB\overline{C} \oplus ABC \oplus A\overline{B}C \oplus ABC \oplus$$
$$\oplus\; \overline{A}\,\overline{B}C \oplus \overline{A}BC \oplus A\overline{B}C \oplus ABC. \qquad (98)$$

Упростим это выражение, применяя свойство (97), тогда получим:

$$f = \overline{A}\overline{B}C \oplus \overline{A}BC \oplus AB\overline{C} \oplus ABC.$$

Отсюда находим, что функция f принимает единичное значение на наборах 001, 011, 110, 111.

Теперь выясним, как то же самое сделать с помощью карты Вейча. В случае булевой алгебры при заполнении карты в каждой её клетке ставилось не более одной единицы. Иное дело в алгебре Жегалкина. Если конъюнкции соединены знаком «$\oplus$», то каждую из них необходимо наносить полностью, проставляя единицы в клетках карты независимо от того, были в них ранее проставлены единицы или нет. На карте рис. 70,*а* единицами обозначена конъюнкция *AB*. На карте рис. 70,*б* приведены две конъюнкции *AB* и *AC*. Заметим, что в клетке 7 поставлены две единицы. Это произошло потому, что минтерм m_7 входит в обе конъюнкции. На карте рис. 70,*в* записана вся функция.

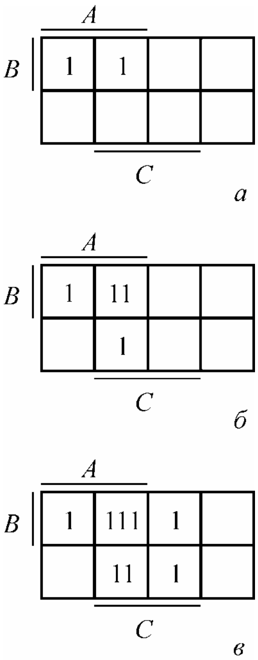


Рис. 70

Обратимся к выражению (98). Оно содержит 8 минтермов. На карте рис. 70,*в* также 8 единиц, каждая из которых обозначает минтерм, входящий в заданную функцию. В выражение (98) минтерм *ABC* входит три раза. В результате минимизации два из них были удалены. Это значит, что на рис. 70,*в* две единицы из трёх в клетке 7 также можно удалить. В клетке 5 находятся две единицы. Обе их можно удалить. Следовательно, в каждой клетке останется не более чем по одной единице. Таким образом, последовательность действий при нахождении СДНФ в алгебре Жегалкина имеет вид:

а) наносим на карту Вейча заданную функцию, причём каждую конъюнкцию записываем полностью независимо от других. Порядок записи конъюнкций значения не имеет;

б) в каждой клетке, где находится чётное число единиц, записываем нуль. Если в какой-либо клетке записано нечётное число единиц, оставляем только одну единицу;

в) получившаяся карта будет содержать искомую СДНФ заданной функции.

Пример. Представим в СДНФ функцию (рис. 71,*а*)

$$f = AB \oplus BC \oplus C \oplus ACD \oplus BD.$$

1	111	11	
11	11111	111	1
	11	1	
	1	1	

а

1	1		
	1	1	1
		1	
	1	1	

б

Рис. 71

После удаления из клеток карты всех пар единиц получим рис. 71,*б*, откуда находим:

$$f = (2, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 15).$$

Если потребуется найти СДНФ инверсии функции, то в соответствии с формулой (95) на карту наносим заданную функцию, а затем в каждую клетку ставим ещё по одной единице. В результате этого там, где число единиц было нечетным, станет четным и наоборот.

Найдём СДНФ инверсии функции

$$f = A \oplus AB \oplus BC \oplus BCD.$$

На рис. 72,*а* изображена карта Вейча этой функции. На рис. 72,*б* приведена та же карта, но в каждую клетку добавлена единица. После удаления всех пар единиц получим искомый результат — карту Вейча, изображённую на рис. 73, откуда находим:

$$\bar{f} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 13, 15).$$

С помощью карт Вейча очень легко перевести выражение из алгебры Жегалкина в булеву алгебру, так как достаточно найти СДНФ заданной функции и затем её минимизировать.

11	111	1	
11	1111	11	
1	1		
1	1		

а

111	1111	11	1
111	11111	111	1
11	11	1	1
11	11	1	1

б

Рис. 72

1			1
1	1	1	1
		1	1
		1	1

Рис. 73

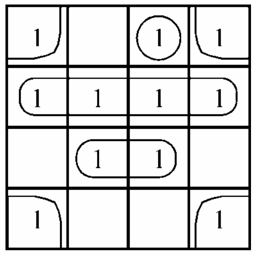


Рис. 74

Чтобы осуществить обратный перевод, т. е. из булевой алгебры в алгебру Жегалкина, заданную булеву функцию необходимо представить в виде

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k, \qquad (99)$$

где $\varphi_i \varphi_j = 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$; $i \neq j$.

Наиболее простой способ такого преобразования заключается в нахождении СДНФ булевой функции, поскольку СДНФ всякой булевой функции удовлетворяет условию (99). Однако это громоздкий путь. Его можно сократить, если воспользоваться картой Вейча. Как это сделать, поясним на примере функции

$$f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15).$$

Нанесём функцию на карту Вейча (рис. 74). Объединим группы единиц так, чтобы эти группы не пересекались и чтобы каждая из них была представлена одиночной конъюнкцией. Вариант такого объединения показан на рис. 74. По карте получаем:

$$f = \overline{C}\,\overline{D} + BD + \overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} =$$
$$= \overline{C}\,\overline{D} \oplus BD \oplus \overline{B}CD \oplus \overline{A}BC\overline{D}.$$

Освобождаемся от инверсий по формуле (95):

$$f = (C \oplus 1)(D \oplus 1) \oplus BD \oplus (B \oplus 1)CD \oplus (A \oplus 1)BC(D \oplus 1) =$$
$$= C \oplus D \oplus CD \oplus 1 \oplus BD \oplus CD \oplus BCD \oplus ABCD \oplus ABC \oplus$$
$$\oplus BCD \oplus BC = C \oplus D \oplus BC \oplus BD \oplus ABC \oplus ABCD \oplus 1.$$

Таким образом, карты Вейча можно эффективно использовать не только в булевой алгебре, но и в различных преобразованиях формул алгебры Жегалкина.

Упражнения

1. Найдите десятичные номера минтермов, если функции зависят от четырёх аргументов:

(641). $f = A \oplus AB \oplus B \oplus BCD$;

(УВХ). $f = A \oplus BC \oplus CD \oplus 1$;

(513). $f = AB \oplus ABC \oplus CD \oplus 1$;

(В54). $f = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus BC$.

2. Найдите СДНФ (десятичные номера минтермов) инверсии функций:

(935). $f = A \oplus AC \oplus BD$;

(МУК). $f = AB \oplus BC \oplus BCD \oplus D$;

(Р27). $f = ABC \oplus BCD \oplus AB \oplus A \oplus B$.

3. Переведите в булеву алгебру и упростите. Для самоконтроля в устройство ввести общее число вхождений аргументов, число инверсных вхождений аргументов и число простых импликант минимальной ДНФ:

(ТИМ). $f = A \oplus AB \oplus BC \oplus CD \oplus D$;

(7В9). $f = AC \oplus BC \oplus ABC \oplus CD$;

(520). $f = BC \oplus ABC \oplus C \oplus D$.

4. Представьте в алгебре Жегалкина булевы функции и упростите. Для самоконтроля в устройство ввести общее число вхождений аргументов и число знаков сложения по модулю два:

(ББП). $f = AB + BD + \overline{B}\,\overline{C}$;

(АРР). $f = AC + \overline{A}D + BC + BD$;

(РШС). $f = (2,5,6,7,9,10,11,13,14,15)$;

(ФАЯ). $f = (1,3,6,7,8,9,10,11,12,14,15)$.

10.4. Понятие производной от булевой функции

Одним из самых перспективных направлений в развитии булевой алгебры является булево дифференциальное исчисление, применяющееся для описания динамики в дискретных системах. Это новый раздел прикладной математической логики. Начало его развития относится к 50-м годам прошлого столетия. Наиболее полно булево дифференциальное исчисление изложено в [3].

В классической математике понятие производной связано с предельным переходом. Но булева алгебра относится к дискретной математике, в которой понятие предела отсутствует. Это значит, что такие термины, как дифференциал, производная, дифференциальное уравнение обозначают что-то другое, не то, что в классическом математическом анализе.

В основе булева дифференцирования находится понятие изменения функции. Поясним это на примере простейшей функции вида $f = AB$. Зафиксируем какой-либо набор значений аргументов, например 01. На этом наборе функция равна нулю. Если после этого аргумент B примет нулевое значение, то функция не изменится, она останется равной нулю. Но если значение аргумента B оставить равным единице и принять $A = 1$, то функция изменит своё состояние и станет равной единице. Таким образом, в некоторых случаях функция изменяет своё значение при изменении значения того или иного аргумента, а в других остаётся неизменной.

Спрашивается, при каких условиях изменение заданного аргумента вызывает изменение значения функции? Если функция достаточно проста, то ответить на этот вопрос нетрудно. Например, функция $f = AB$ меняет своё значение с изменением аргумента A, если $B = 1$. Аналогично функция $f = AB$ меняет своё значение с изменением аргумента B, если $A = 1$. В случае большего числа переменных функция может менять своё значение одновременно с заданным аргументом на нескольких наборах значений переменных. Рассмотрим, например, функцию

$$f(A,B,C) = A + BC.$$

Очевидно, что эта функция меняет своё значение одновременно с аргументом A в трёх случаях:

а) если $B = C = 0$;
б) если $B = 0$; $C = 1$;
в) если $B = 1$; $C = 0$.

Эти три случая удобно представить в виде булевой функции, зависящей от аргументов B и C:

$$\varphi(B,C) = \overline{B} + \overline{C}.$$

Функция $\varphi(B, C)$ обладает очень важным свойством. При $\varphi(B, C) = 1$ функция $f(A, B, C)$ меняет свои значения одновременно с изменением значения аргумента A.

В общем случае если задана некоторая функция $f(A,B,\ldots,L)$, то всегда найдётся функция $\varphi(B,\ldots,L)$, такая, что при $\varphi(B,\ldots,L) = 1$ функция $f(A,B,\ldots,L)$ меняет свои значения одновременно с изменением аргумента A. Функцию $\varphi(B,\ldots,L)$ называют **производной** по переменной A от булевой функции $f(A,B,\ldots,L)$ и обозначают $\frac{\partial f}{\partial A}$: $\frac{\partial f}{\partial A} = \varphi(B,C,\ldots,L)$.

Рассмотрим более сложный пример. Найдем производную по переменной A от функции

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B}\,D + \overline{B}\,C\,D + A\overline{C}\,\overline{D}.$$

Подставим в это выражение какой-либо набор значений аргументов B, C, D. Получим один из четырех результатов:

$$f = 1; \quad f = 0; \quad f = A; \quad f = \overline{A}.$$

Все наборы, на которых $f = A$ или $f = \overline{A}$, образуют функцию $\varphi(B, C, D)$. Очевидно, что если $\varphi(B, C, D) = 1$, то функция f зависит только от аргумента A. Следовательно, функция $\varphi(B, C, D)$ есть производная от функции f по переменной A.

Найдем функцию $\varphi(B, C, D)$. Для этого в выражение f подставим все наборы значений переменных B, C, D и для каждого набора найдем остаточную функцию:

$$f(A,0,0,0) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0\cdot 0 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = A;$$
$$f(A,0,0,1) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0\cdot 1 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{1} = \overline{A};$$
$$f(A,0,1,0) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 1\cdot 0 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{0} = 0;$$
$$f(A,0,1,1) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 1\cdot 1 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = 1;$$
$$f(A,1,0,0) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 0\cdot 0 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = A;$$
$$f(A,1,0,1) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{1}\cdot 0\cdot 1 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{1} = A;$$
$$f(A,1,1,0) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 1\cdot 0 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{0} = A;$$
$$f(A,1,1,1) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{1}\cdot 1\cdot 1 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = A.$$

Функция f равна A или $\overline{A}$ на шести наборах значений переменных B, C, D: 0, 1, 4, 5, 6, 7. Если ее минимизировать (проще всего это сделать при помощи карты Вейча трех переменных), то получим:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = B + \overline{C}.$$

Таким образом, если $B + \overline{C} = 1$, то заданная функция f меняет свои значения одновременно с изменением переменной A.

Упражнения

1. (Н0Р). Укажите десятичные наборы значений аргументов A и B, на которых функция $f = AB + C$ меняет свои значения с изменением аргумента C.

2. Укажите десятичные наборы значений аргументов A, B, C, на которых функция $f(A, B, C, D)$ меняет свои значения с изменением аргумента D:

(Б0С). $f = AB + CD$; (ВВТ). $f = AB + \overline{C}D$;

(ЕЗУ). $f = A\overline{B} + C\overline{D}$; (ТИФ). $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$.

3. Найдите минимальную ДНФ функции $\varphi(A, B, C)$, такую, что если $\varphi(A, B, C) = 1$, то функция $f(A, B, C, D)$ меняет свои значения одновременно с изменением аргумента D:

(КЫХ). $f = A\overline{B} + BCD$; (0ВЦ). $f = \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}D$;

(Э0Й). $f = AC + B + CD$.

10.5. Производная первого порядка

Найти производную $\dfrac{\partial f}{\partial A}$ от некоторой функции $f(A, B, \ldots, L)$ можно сплошным просмотром всех наборов значений аргументов $A, B, \ldots, L$, выбирая из них те, на которых функция f непосредственно зависит от аргумента A. Однако аналитическим путём это сделать гораздо проще.

Согласно [14] **производная первого порядка** $\dfrac{\partial f}{\partial A}$ от функции $f(A, B, \ldots, L)$ записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial A} = f(1, B, \ldots, L) \oplus f(0, B, \ldots, L), \tag{100}$$

где $f(1, B, \ldots, L)$ — единичная остаточная функция, получающаяся на основе функции $f(A, B, \ldots, L)$, если в ней все вхождения аргумента A заменить единицами;

$f(0, B, \ldots, L)$ — нулевая остаточная функция, получающаяся на основе функции $f(A, B, \ldots, L)$, если в ней все вхождения аргумента A заменить нулями.

Согласно (93) выражение (100) записывается без знака «⊕» следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \bar f(1, B, \ldots, L) \cdot f(0, B, \ldots, L) + f(1, B, \ldots, L) \cdot \bar f(0, B, \ldots, L).$$

Например, найдем производную первого порядка по аргументу A от функции

$$f = A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{B}\,\overline{D}:$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial A} &= (1 \cdot \overline{B}C + \overline{1} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D}) \oplus (0 \cdot \overline{B}C + \overline{0} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D}) = \\
&= \overline{(1 \cdot \overline{B}C + \overline{1} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D})}(0 \cdot \overline{B}C + \overline{0} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D}) + (1 \cdot \overline{B}C + \\
&+ \overline{1} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D})\overline{(0 \cdot \overline{B}C + \overline{0} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D})} = \overline{\overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D}}(BC + \\
&+ \overline{B}\,\overline{D}) + (\overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D})\overline{BC + \overline{B}\,\overline{D}} = (B + \overline{C})(B + D)(BC + \overline{B}\,\overline{D}) + \\
&+ (\overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D})(\overline{B} + \overline{C})(B + D) = BC + \overline{B}CD = BC + CD.
\end{aligned}$$

Наборы значений аргументов B, C, D, на которых функция f меняет свои значения одновременно с изменением аргумента A, можно найти двумя путями:

а) представить найденную производную в СДНФ;

б) решить булево уравнение вида

$$BC + CD = 1.$$

В обоих случаях получатся три набора 011, 110, 111. Подставим набор 011 в заданную функцию ($B = 0$, $C = D = 1$):

$$f = A \cdot \overline{0} \cdot 1 + \overline{A} \cdot 0 \cdot 1 + \overline{0} \cdot \overline{1} = A,$$

откуда следует, что функция f меняет свои значения с изменением аргумента A.

Подставим в заданную функцию набор 110 (т. е. примем $B = C = 1$, $D = 0$):

$$f = A \cdot \overline{1} \cdot 1 + \overline{A} \cdot 1 \cdot 1 + \overline{1} \cdot \overline{0} = \overline{A}\,.$$

Отсюда видно, что и в этом случае функция меняет свои значения на противоположные с изменением аргумента A.

На наборе 111, когда $B = C = D$, имеем:

$$f = A \cdot \overline{1} \cdot 1 + \overline{A} \cdot 1 \cdot 1 + \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{A}.$$

Результат совпадает с предыдущим.

Найдём производную первого порядка от той же функции по аргументу B:

$$\frac{\partial f}{\partial B} = \overline{A}C \oplus (AC + \overline{D}) = AC + CD + \overline{C}\,\overline{D}.$$

Производная по переменной C имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial C} = (A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{B}\,\overline{D}) \oplus \overline{B}\,\overline{D} = \overline{A}B + A\overline{B}D.$$

Находим производную по аргументу D:

$$\frac{\partial f}{\partial D} = (A\overline{B}C + \overline{A}BC) \oplus (A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{B}) = \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Таким образом, по формуле (100) можно найти производную от любой булевой функции без сплошного просмотра всех наборов значений аргументов.

Производная от функции $f(A, B, \ldots, L)$ обладает свойством:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{\partial \bar f}{\partial A}. \tag{101}$$

Чтобы убедиться в этом, запишем выражение

$$\frac{\partial f}{\partial A} = f(1, B, \ldots, L) \oplus f(0, B, \ldots, L).$$

Освободимся от знака сложения по модулю два:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial A} = {} & f(1, B, \ldots, L) \cdot \bar f(0, B, \ldots, L) + \\
& + \bar f(1, B, \ldots, L) \cdot f(0, B, \ldots, L).
\end{aligned} \tag{102}$$

Поставим знаки инверсии в этом выражении над всеми символами f:

$$\frac{\partial \bar f}{\partial A} = \bar f(1, B, \ldots, L) \cdot f(0, B, \ldots, L) + f(1, B, \ldots, L) \cdot \bar f(0, B, \ldots, L).$$

Получилось выражение, совпадающее с (102), следовательно, соотношение (101) справедливо.

Упражнения

1. Найдите минимальные ДНФ единичных остаточных функций относительно аргумента A:

(К00). $f = ABC + BCD + \overline{A}BC$;

(ФЗП). $f = AB + \overline{A}B + \overline{A}BCD$;

(АЛБ). $f = \overline{A}B + \overline{A}C + ABC\overline{C}\,\overline{D}$.

2. Найдите минимальные ДНФ нулевых остаточных функций относительно аргумента B (т. е. при $B = 0$):

(0КС). $f = BC + \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$;

(РИТ). $f = A\overline{C} + BD + A\overline{C}\,\overline{D}$;

(ИШУ). $f = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}D$.

3. (Р0М). Дана функция $f(A, B, C, D, E)$. Укажите аргументы, от которых зависит функция $\dfrac{\partial f}{\partial B}$.

4. (ФАН). Укажите аргументы, от которых зависит функция f, если её производная имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \varphi(A, B, C, D).$$

5. Найдите минимальные ДНФ производных по аргументу A от булевых функций:

(ТП0). $f = A\overline{B} + ACD$;
(0ФП). $f = A + B + C + D$;
(ВТК). $f = A + BCD$.

6. (КЛП). Известно, что $\frac{\partial f}{\partial A} = B + \overline{C}D$. Найдите $\frac{\partial \overline{f}}{\partial A}$.

10.6. Дифференцирование булевых функций с применением карт Вейча

Нахождение производных булевых функций аналитическим способом, изложенным в предыдущем подразделе, сопровождается значительными трудозатратами даже в тех случаях, когда функция содержит две-три простых импликанты. Эти трудозатраты можно существенно снизить, если воспользоваться картой Вейча. Основные положения, относящиеся к применению карт Вейча в алгебре Жегалкина, изложены в подразделе 10.3, поэтому здесь отметим лишь, что для нахождения производной от булевой функции $f(A, B, \ldots, L)$ достаточно записать выражение в виде (100) и нанести его на карту Вейча. При этом необходимо иметь в виду, что остаточные функции выражения (100) представлены в булевой алгебре, а сами они соединены знаком сложения по модулю два. Следовательно, первая остаточная функция наносится на карту Вейча так, как это делается в булевой алгебре, т. е. в каждой клетке указывается не более одной единицы. Вторая остаточная функция наносится аналогично. В результате в каждой клетке будут либо две единицы, либо одна, либо ни одной. Поясним это на примере. Найдём производную по аргументу A от функции

$$f = AB + \overline{A}C + \overline{A}BD + \overline{B}CD.$$

Запишем искомую функцию в виде

$$\frac{\partial f}{\partial A} = (B + \overline{B}CD) \oplus (C + BD + \overline{B}CD).$$

Заметим, что обе остаточные функции зависят от трёх аргументов B, C, D, следовательно, необходима карта трёх переменных. Нанесём на неё единичную остаточную функцию (рис. 75). На неё же наносим нулевую остаточную функцию. Получим карту, приведённую на рис. 76. Все пары единиц заменяем нулями. Искомая производная (рис. 77) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \overline{B}C\overline{D} + B\overline{C}\,\overline{D}.$$

Рассмотрим ещё один пример. Найдем производную по переменной E от функции

$$f = ABC + \overline{B}CE + \overline{B}DE + B\overline{C}\,\overline{E}. \qquad (103)$$

Наносим на карту четырёх переменных A, B, C, D (рис. 78) функцию

$$\frac{\partial f}{\partial E} = (ABC + \overline{B}C + \overline{B}D) \oplus (ABC + B\overline{C}).$$

По карте получаем минимальную ДНФ:

$$\frac{\partial f}{\partial E} = B\overline{C} + \overline{B}D + \overline{B}C.$$

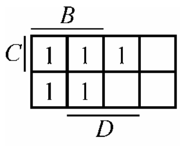


Рис. 75

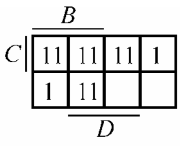


Рис. 76

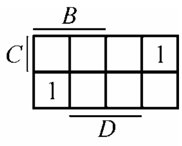


Рис. 77

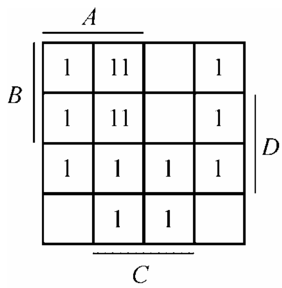


Рис. 78

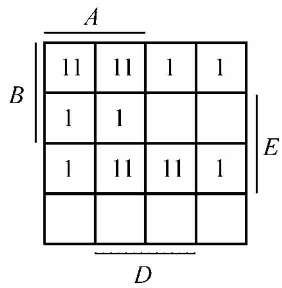


Рис. 79

По той же карте находим, что заданная функция меняет свои состояния одновременно с переменной E на десяти наборах значений аргументов A, B, C, D. При этом на наборах 1, 2, 3, 9, 10, 11 получаем $f = E$ и на наборах 4, 5, 12, 13 имеем $f = \overline{E}$.

Найдём производную от функции (103) по C:

$$\frac{\partial f}{\partial C} = (AB + \overline{B}E + \overline{B}DE) \oplus (\overline{B}DE + B\overline{E}).$$

По карте (рис. 79) находим, что эта функция принимает единичное значение на следующих шести наборах значений аргументов A, B, D, E: 1, 4, 6, 9, 13, 15. Если их подставить в заданное выражение (103), то на четырёх наборах 1, 9, 13, 15 функция принимает вид $f = C$, а на двух наборах 4 и 6 — $f = \overline{C}$.

Упражнения

1. Нанесите на карту Вейча функцию

$$f = (AB + CD) \oplus (BC + AD).$$

(БК1)! Сколько единиц на карте? Сколько на карте клеток, в которых записано по две единицы?

2. Нанесите на карту Вейча производную по аргументу E от функции

$$f = ABE + BCE + \overline{A}D\overline{E} + B\overline{C}\,\overline{E}.$$

(732)! Сколько всего единиц на карте? Сколько на карте клеток, где записано по две единицы?

3. (Д03). Укажите десятичные номера минтермов, дизъюнкция которых образует функцию $\frac{\partial f}{\partial E}$, где

$$f = BCE + B\overline{C}\,\overline{E} + ABE + \overline{A}D\overline{E}.$$

4. Дана функция $f = AB + \overline{B}C + \overline{C}D + DE + B\overline{C}D\overline{E}$.

Нанесите на карту Вейча производную по аргументу C от этой функции. (ТУ4). От каких аргументов зависит минимальная ДНФ функции $\frac{\partial f}{\partial C}$?

(БХШ)! Сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции $\frac{\partial f}{\partial C}$? Какие аргументы входят в неё по одному разу?

5. Найдите минимальные ДНФ функций $\frac{\partial f}{\partial A}$, $\frac{\partial f}{\partial B}$, $\frac{\partial f}{\partial C}$, $\frac{\partial f}{\partial D}$, если $f = A\overline{B}C + BC\overline{D} + A\overline{C} + B\overline{C}D$.

(НВ6). Для каждой из производных найдите число вхождений аргументов их минимальных ДНФ (ответ — последовательность четырёх чисел).

(Л0Л). Укажите десятичные номера минтермов функции $\dfrac{\partial f}{\partial A}$.

(138). Укажите десятичные наборы значений аргументов, на которых функция $\dfrac{\partial f}{\partial B}$ принимает единичное значение.

(279). На каких наборах (в десятичной системе) функция $\dfrac{\partial f}{\partial C}$ равна единице?

(ГЛ0). Укажите десятичные наборы, на которых функция $\dfrac{\partial \bar f}{\partial D}$ равна единице.

6. (МУ0). Укажите десятичные номера минтермов функции $\dfrac{\partial f}{\partial D}$, если

$$f = AE + BC + BD + A\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{C}D.$$

7. (НЕЕ)! Дана функция

$$f = A\overline{B} + B\overline{C} + C\overline{D} + D\overline{E} + \overline{A}B.$$

Сколько существует наборов значений аргументов A, C, D, E, на которых $f = B$? Сколько существует наборов, на которых $f = \overline{B}$? Сколько минтермов входит в функцию $\dfrac{\partial f}{\partial B}$?

10.7. Смешанные производные

Пусть дана булева функция $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. **Смешанной производной** m-го порядка от булевой функции $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ называется функция вида

$$\frac{\partial^m f}{\partial A_{i_1} \partial A_{i_2} \ldots \partial A_{i_k}},$$

где $i = 1,2,3,\ldots,n$; n — число аргументов функции f; m — порядок производной; A_i — i-й логический аргумент.

Некоторые авторы, например [3], смешанную производную называют m-кратной производной.

При нахождении смешанных производных можно пользоваться соотношением вида

$$\frac{\partial^m f}{\partial A_{i_1} \partial A_{i_2} \ldots \partial A_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial A_{i_1} \partial A_{i_2} \ldots \partial A_{i_{m-1}}}\right).$$

Из приведённых формул следует, что первая операция дифференцирования осуществляется по какому-либо аргументу точно так же, как и в случае производной первого порядка. В результате получится некоторая функция. Эта функция не зависит от того аргумента, по которому было осуществлено дифференцирование. Однако она зависит (в общем случае) от других аргументов. Поэтому её можно продифференцировать вторично по любому из n аргументов, в том числе и по тому, по которому дифференцирование было выполнено в первый раз. Снова получится некоторая функция. Её можно продифференцировать третий раз и т. д.

Рассмотрим пример. Пусть дана функция

$$f = AB\overline{C} + \overline{B}CD + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BD.$$

Продифференцируем её по аргументу A:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = (B\overline{C} + \overline{B}CD + B\overline{C}\,\overline{D}) \oplus \oplus (\overline{B}CD + B\overline{C}\,\overline{D} + BD) = BCD. \qquad (104)$$

Полученный результат дифференцируем по аргументам B, C, D:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial B} = CD; \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial A \partial B \partial C} = D;$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial A \partial B \partial C \partial D} = 1.$$

Смешанные производные обладают свойством: результат m-кратного дифференцирования не зависит от порядка аргументов, по которым осуществляется дифференцирование. Например, если выражение (104) сначала продифференцировать по аргументу B, а затем по A, то получим один и тот же результат:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B \partial A} = \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial B};$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = (A\overline{C} + \overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}D) \oplus CD = \overline{C} + AD;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B \partial A} = (\overline{C} + D) \oplus \overline{C} = CD = \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial B}.$$

Упражнения

1. Найдите смешанную производную (по переменной A, затем по переменной B):

(ЗЗП). $f = AB$; (ТХТ). $f = \overline{A} + B$;

(756). $f = B$; (КЫР). $f = 1$;

(ЛИС). $f = 0$.

2. (МЯТ)! Найдите производную по переменной A функции $A\overline{B} + C$. Результат продифференцируйте по B.

3. (СОУ). Найдите производную функции $f = AB + CD$ сначала по переменной A, затем — по B. Результат второго дифференцирования введите в устройство в виде минимальной ДНФ.

4. Дана функция $f = A\overline{C} + ABD + \overline{B}\,\overline{C}D$.

(Д0Ф). Найдите смешанную производную по переменным A и B.

(НУХ). Найдите смешанную производную по переменным B и D.

(ЦХЦ). Найдите смешанную производную по переменным D, A, B.

(РЯЧ). Найдите минимальную ДНФ выражения:

$$\frac{\partial f}{\partial C} + \frac{\partial^2 f}{\partial B \partial C} =$$

(КЭШ). Найдите минимальную ДНФ выражения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial C \partial B} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial B \partial C} =$$

10.8. Теоремы о разложении булевых функций

Теорема 1. Для булевой функции f, зависящей от аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, справедливо

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i \frac{\partial f}{\partial A_i}, \quad \text{где } i = 1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. По теореме разложения (см. подраздел 2.5) заданную функцию f представим в виде

$$f = \overline{A}_i\, f(A_i = 0) \oplus A_i\, f(A_i = 1).$$

Освободимся от знака инверсии по формуле (95):

$$f = (1 \oplus A_i)\, f(A_i = 0) \oplus A_i\, f(A_i = 1).$$

Раскроем скобки:

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i\, f(A_i = 0) \oplus A_i\, f(A_i = 1).$$

Вынесем за скобки аргумент A_i:

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i [f(A_i = 0) \oplus f(A_i = 1)],$$

откуда получаем окончательно:

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть дано: $f = AB + \overline{B}C.$ Разложим эту функцию:

а) по переменной A: $f = \overline{B}C \oplus A \cdot B,$ где $B = \dfrac{\partial f}{\partial A};$

б) по переменной B: $f = C \oplus B(A \oplus C),$ где $A \oplus C = \dfrac{\partial f}{\partial B};$

в) по переменной C: $f = AB \oplus C \cdot \overline{B},$ где $\overline{B} = \dfrac{\partial f}{\partial C}.$

Теорема 2. Для булевой функции $f = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ справедливо

$$f = f(A_i = 1) \oplus \overline{A}_i \frac{\partial f}{\partial A_i}, \quad \text{где } i = 1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. По теореме разложения (см. подраздел 2.5) получаем:

$$f = \overline{A}_i\, f(A_i = 0) \oplus A_i\, f(A_i = 1).$$

Вместо аргумента A_i подставим: $A_i = A_i \oplus 1 \oplus 1 = \overline{A}_i \oplus 1,$ тогда получим:

$$f = \overline{A}_i\, f(A_i = 0) \oplus (\overline{A}_i \oplus 1)\, f(A_i = 1).$$

Раскроем скобки:

$$f = \overline{A}_i\, f(A_i = 0) \oplus f(A_i = 1) \oplus \overline{A}_i\, f(A_i = 1).$$

Вынесем за скобки $\overline{A}_i$:

$$f = f(A_i = 1) + \overline{A}_i [f(A_i = 0) \oplus f(A_i = 1)].$$

Выражение в квадратных скобках есть производная от функции f по переменной A_i, следовательно:

$$f = f(A_i = 1) \oplus \overline{A}_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Воспользуемся выражением $f = AB + \overline{B}C.$ Разложим эту функцию:

а) по A: $f = (B + C) \oplus \overline{A} \cdot B,$ где $B = \dfrac{\partial f}{\partial A};$

б) по B: $f = A \oplus \overline{B}(A \oplus C),$ где $A \oplus C = \dfrac{\partial f}{\partial B};$

в) по C: $f = (A + \overline{B}) \oplus \overline{C} \cdot \overline{B},$ где $\overline{B} = \dfrac{\partial f}{\partial C}.$

Теорема 3. Для булевой функции $f = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ справедливо

$$f = f(A_i = c) \oplus (A_i \oplus c) \frac{\partial f}{\partial A_i}, \text{ где } i = 1,2,\ldots,n;\ c \in \{0,1\}.$$

Эта теорема обобщает две предыдущие теоремы. Если $c = 0$, то

$$f = f(A_i = 0) \oplus (A_i \oplus 0) \frac{\partial f}{\partial A_i} = f(A_i = 0) \oplus A_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что совпадает с теоремой 1. Если же $c = 1$, то

$$f = f(A_i = 1) \oplus (A_i \oplus 1) \frac{\partial f}{\partial A_i} = f(A_i = 1) \oplus \overline{A}_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что совпадает с теоремой 2.

Упражнения

1. (КЭП)! Функцию $f = AC + \overline{A}B$ разложили по одной из переменных, в результате чего получили выражение $f = AC \oplus \overline{A}B.$ Укажите в этом выражении производную и переменную, по которой продифференцировали функцию f, а также переменную, по которой разложена функция f.

2. (ЗВ0). Найдите разложение по переменной B функции вида

$$f = A\overline{B} + B\overline{C}D.$$

При вводе в устройство ответа вместо знака «⊕» использовать знак «+». От инверсий не освобождаться. Буквы в скобках упорядочить по алфавиту.

3. В нижеприведённом списке укажите номера всех выражений, являющихся разложением функции

$$f = AB\overline{C} + CD + BD:$$

(141). По переменной A; (РЕХ). По переменной B;
(823). По переменной C; (ИП4). По переменной D.

1) $f = (AB + BD) \oplus C(AB\overline{D} + \overline{B}D);$

2) $f = (B\overline{C} + CD + BD) \oplus \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D};$

3) $f = D \oplus \overline{C}(AB\overline{D} \oplus \overline{B}D);$

4) $f = (CD + BD) \oplus AB\overline{C}\,\overline{D};$

5) $f = AB\overline{C} \oplus D(C + \overline{A}B);$

6) $f = (B + C) \oplus \overline{D}(C + \overline{A}B);$

7) $f = (A\overline{C} + D) \oplus \overline{B}(A\overline{C} + \overline{C}D);$

8) $f = CD \oplus B(A\overline{C} + \overline{C}D).$

10.9. Разложение булевых функций в ряд Тейлора

Брук Тейлор, английский математик, нашедший формулу для разложения функций в степенные ряды, жил в 1685—1731 годах. Джордж Буль (см подраздел 1.3 данного пособия) жил значительно позднее, в 1815—1864 годах. Поэтому Тейлор не мог заниматься вопросами дифференцирования булевых функций.

Чем же объяснить, что одна из формул в булевой алгебре названа рядом Тейлора? Только тем, что всякая булева функция может быть разложена в ряд, аналогичный ряду Тейлора, имеющему вид:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots,$$

где $f(a)$ — значение заданной функции $f(x)$ в точке a;

$f'(a)$ — значение первой производной в точке a;

$f''(a)$ — значение второй производной в той же точке a и т. д.

Пусть дана функция $f(A, B, C)$. Разложим её по переменной A:

$$f = (A,B,C) = f(c_1,B,C) \oplus (A \oplus c_1)\frac{\partial f(A,B,C)}{\partial A};$$
$$f(A,B,C) = \psi_1 \oplus (A \oplus c_1)\psi_2. \qquad (105)$$

где c_1 — постоянная, принимающая значения 0 или 1.

Выражение $A \oplus c_1$, стоящее перед функцией ψ_2, является коэффициентом. Функции ψ_1 и ψ_2 имеют вид:

$$\psi_1 = f(c_1,B,C);$$
$$\psi_2 = \frac{\partial f(A,B,C)}{\partial A}.$$

Функции ψ_1 и ψ_2 разложим по переменной B:

$$\psi_1 = f(c_1,c_2,C) \oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B};$$
$$\psi_2 = \frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A} \oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A \partial B},$$

где c_2 — постоянная, равная нулю или единице;

$B \oplus c_2$ — коэффициент перед производной от заданной функции $f(A, B, C)$.

Выражения ψ_1 и ψ_2 подставим в (105):

$$f(A,B,C) = f(c_1,c_2,C) \oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B} \oplus$$
$$\oplus (A + c_1)\left[\frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A} \oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A \partial B}\right] =$$
$$= f(c_1,c_2,C) \oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B} \oplus$$
$$\oplus (A \oplus c_1)\frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A} \oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A \partial B} =$$
$$= \varphi_1 \oplus (B \oplus c_2)\varphi_2 \oplus (A \oplus c_1)\varphi_3 \oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\varphi_4, \qquad (106)$$

где символы φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 обозначают:

$$\varphi_1 = f(c_1,c_2,C); \qquad \varphi_3 = \frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A};$$
$$\varphi_2 = \frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B}; \qquad \varphi_4 = \frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A \partial B}.$$

Каждое из этих выражений разложим по переменной C и результаты разложения подставим в (106):

$$f(A,B,C) = f(c_1,c_2,c_3) \oplus (C \oplus c_3)\frac{\partial f(c_1,c_2,C)}{\partial C} \oplus$$
$$\oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,c_3)}{\partial B} \oplus (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)\frac{\partial^2 f(c_1,B,C)}{\partial B \partial C} \oplus$$
$$\oplus (A \oplus c_1)\frac{\partial f(A,c_2,c_3)}{\partial A} \oplus (A \oplus c_1)(C \oplus c_3)\frac{\partial^2 f(A,c_2,C)}{\partial A \partial C} \oplus$$
$$\oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\frac{\partial f^2(A,B,c_3)}{\partial A \partial B} \oplus$$
$$\oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)(C \oplus c_3)\frac{\partial^3 f(A,B,C)}{\partial A \partial B \partial C}, \qquad (107)$$

где c_3 — постоянная, принимающая значения 0 или 1.

Полученное выражение и есть разложение функции $f(A, B, C)$ в ряд Тейлора, представленное в общем виде.

Рассмотрим пример. Разложим в ряд Тейлора следующую функцию:

$$f = \overline{A} + B\overline{C}.$$

Сначала найдём все производные согласно формуле (107):

$$\frac{\partial f(c_1,c_2,C)}{\partial C} = \frac{\partial(\overline{c}_1 + c_2\overline{C})}{\partial C} = \overline{c}_1 \oplus (\overline{c}_1 + c_2) = c_1 c_2;$$
$$\frac{\partial f(c_1,B,c_3)}{\partial B} = \frac{\partial(\overline{c}_1 + B\overline{c}_3)}{\partial B} = (\overline{c}_1 + \overline{c}_3) \oplus \overline{c}_1 = c_1\overline{c}_3;$$
$$\frac{\partial^2 f(c_1,B,C)}{\partial B \partial C} = \frac{\partial}{\partial C}\left[\frac{\partial(\overline{c}_1 + B\overline{C})}{\partial B}\right] = \frac{\partial}{\partial C}\left[(\overline{c}_1 + \overline{C}) \oplus \overline{c}_1\right] = c_1;$$
$$\frac{\partial f(A,c_2,c_3)}{\partial A} = \frac{\partial(\overline{A} + c_2\overline{c}_3)}{\partial A} = c_2\overline{c}_3 \oplus (1 + c_2\overline{c}_3) = \overline{c}_2 + c_3;$$
$$\frac{\partial^2 f(A,c_2,C)}{\partial A \partial C} = \frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{\partial(\overline{A} + c_2\overline{C})}{\partial C}\right] = \frac{\partial}{\partial A}\left[\overline{A} \oplus (\overline{A} + c_2)\right] = c_2;$$
$$\frac{\partial^2 f(A,B,c_3)}{\partial A \partial B} = \frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{\partial(\overline{A} + B\overline{c}_3)}{\partial B}\right] = \frac{\partial}{\partial A}\left[(\overline{A} + \overline{c}_3) \oplus \overline{A}\right] = \overline{c}_3;$$
$$\frac{\partial^3 f(A,B,C)}{\partial A \partial B \partial C} = \frac{\partial^3(\overline{A} + B\overline{C})}{\partial A \partial B \partial C} = 1.$$

Подставим найденные производные в (107):

$$f = \overline{A} + B\overline{C} = (\overline{c}_1 + c_2\overline{c}_3) \oplus (C \oplus c_3)c_1c_2 \oplus$$
$$\oplus (B \oplus c_2)c_1\overline{c}_3 \oplus (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)c_1 \oplus$$
$$\oplus (A \oplus c_1)(\overline{c}_2 + c_3) \oplus (A \oplus c_1)(C \oplus c_3)c_2 \oplus$$
$$\oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\overline{c}_3 \oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)(C \oplus c_3). \qquad (108)$$

Получили полиномиальное представление функции $f = \overline{A} + B\overline{C}$ в общем виде. Чтобы найти разложение функции в ряд Тейлора в заданной точке, т. е. на определённом наборе значений постоянных c_1, c_2, c_3, значения этих постоянных необходимо подставить в (108). Всего для функции $f = \overline{A} + B\overline{C}$ существует восемь наборов значений постоянных, следовательно, столько же возможно полиномиальных представлений заданной функции в виде ряда Тейлора. Их полный список имеет вид (слева указаны наборы значений постоянных c_1, c_2, c_3):

000 $\quad f = 1 \oplus A \oplus AB \oplus ABC;$

001 $\quad f = 1 \oplus A \oplus AB\overline{C};$

010 $\quad f = 1 \oplus AC \oplus A\overline{B} \oplus A\overline{B}C;$

011 $\quad f = 1 \oplus A \oplus A\overline{C} \oplus A\overline{B}\,\overline{C};$

100 $\quad f = \overline{A} \oplus \overline{A}B \oplus \overline{A}BC \oplus B \oplus BC;$

101 $\quad f = \overline{A} \oplus B\overline{C} \oplus \overline{A}B\overline{C};$

110 $\quad f = 1 \oplus \overline{B} \oplus C \oplus \overline{A}C \oplus \overline{A}\,\overline{B} \oplus \overline{B}C \oplus \overline{A}\,\overline{B}C;$

111 $\quad f = \overline{A} \oplus \overline{C} \oplus \overline{A}\,\overline{C} \oplus \overline{B}\,\overline{C} \oplus \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$

Заметим, что во всех этих выражениях каждая переменная представлена либо с инверсией, либо без инверсии и нет ни одного случая, когда переменная входит в одну конъюнкцию со знаком инверсии, а в другую — без него. При этом распределение инверсий легко определить по набору значений постоянных: единице соответствует инверсная форма аргумента, нулю — неинверсная. Например, если набор имеет вид 101, то это значит, что переменные A и C входят в разложение со знаком отрицания, а переменная B — в прямой форме.

Все восемь полученных разложений представляют собой выражения, совпадающие с функцией $f = \overline{A} + B\overline{C}$. Первое из них не содержит инверсных аргументов. Такое разложение (когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$) называется **полиномом Жегалкина**. В виде полинома Жегалкина легко представить любую булеву функцию. Для этого, как показано в подразделе 10.2, достаточно её записать с использованием операции сложения по модулю два, освободиться от знаков инверсии и удалить все конъюнкции, входящие в выражение чётное число раз.

Остальные семь вариантов полиномиального представления булевой функции $f = \overline{A} + B\overline{C}$ содержат инверсные аргументы. По списку этих вариантов видно, что число конъюнкций в них колеблется от трёх до семи. Полином Жегалкина не является самым коротким. Наиболее компактное выражение соответствует случаю, когда $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$:

$$f = 1 \oplus A \oplus AB\overline{C} = \overline{A} \oplus AB\overline{C}.$$

Таким образом, путём разложения функции в ряд Тейлора можно найти кратчайший полином, содержащий как инверсные, так и неинверсные аргументы.

Следует отметить, что сложность выражения, представляющего собой разложение функции в ряд Тейлора, быстро увеличивается с ростом числа переменных. Если функция зависит от n аргументов, то $k = 2^n$, где k — число конъюнкций её полиномиального представления.

Метод сплошного перебора всех k полиномов эффективен лишь при небольших n (в пределах десятка). С ростом n поиск кратчайших полиномов становится всё более трудной задачей, и хотя уже созданы алгоритмы и программы, обеспечивающие нахождение оптимальных рядов Тейлора, в целом исследования этой проблемы ещё далеки от завершения.

Упражнения

1. (БББ)! Дана некоторая функция $f(A, B, C)$. Сколько конъюнкций (слагаемых) содержит выражение, представляющее собой разложение данной функции по аргументу A? По аргументам A и B? По аргументам A, B, C?

2. Функция $f(A, B, C, D)$ разложена в ряд Тейлора.

(0МВ). Сколько слагаемых содержит полученное выражение?

(58Г). Сколько конъюнкций содержат двукратную производную?

(АРД)! Сколько конъюнкций содержат однократную производную? Трёхкратную производную?

(ММЕ). Сколько конъюнкций содержат коэффициент, состоящий из двух скобочных выражений?

(УЯЖ). Одно из слагаемых содержит коэффициент вида $C \oplus c_3$. Какие переменные в записи производной при этом коэффициенте заменены постоянными?

(ВЫК). Одна из конъюнкций содержит производную вида $\dfrac{\partial^2 f(c_1, B, c_3, D)}{\partial B \partial D}$. Укажите аргументы, входящие в коэффициент при этой производной.

(ПКЛ)! Одно из слагаемых содержит коэффициент $B \oplus c_2$. Сколько аргументов в производной заменено постоянными? Какие аргументы не заменены постоянными? По каким переменным взята производная?

3. Дана булева функция $f = AC + B\overline{C}$.

(ЗУМ)! Найдите производные (постоянные c_1, c_2, c_3 вводить с использованием знака нижнего индекса — стрелки, направленной вниз):

$$\frac{\partial f}{\partial A}; \quad \frac{\partial f}{\partial B}; \quad \frac{\partial f}{\partial C}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial B}.$$

(ЦБН)! Найдите производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial C}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial B \partial C}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial A \partial B \partial C}.$$

(ТЗ0)! Разложите функцию в ряд Тейлора и для набора значений постоянных 000 определите:

а) число вхождений переменных;

б) число конъюнкций, содержащих по две буквы;

в) число знаков сложения по модулю два.

(ШРП)! Для набора значений постоянных 001 определите:

а) число конъюнкций, содержащих по одной инверсной букве;

б) число вхождений неинверсных букв;

в) число знаков сложения по модулю два;

г) общее число вхождений переменных.

(БЛБ)! Для набора значений постоянных 011 найдите:

а) число вхождений переменных;

б) число вхождений инверсных букв;

в) число двухбуквенных конъюнкций.

(ФАС). Для функции, разложенной в ряд Тейлора, укажите десятичные номера наборов значений постоянных, на которых запись функции начинается с единицы.

(ЯХТ). Укажите десятичные номера значений постоянных, на которых функция, разложенная в ряд Тейлора, содержит 5 вхождений аргументов.

(ЖИУ). Укажите десятичные номера наборов значений постоянных, на которых функция, разложенная в ряд Тейлора, содержит 6 вхождений переменных.

4. (АЗФ)! Сколько вхождений переменных имеет полином Жегалкина для функции $f = B + A\overline{C} + \overline{A}C$? Сколько двухбуквенных конъюнкций содержит этот полином? Сколько в нём инверсных букв? Сколько в нём знаков сложения по модулю два?

10.10. Нахождение отдельных конъюнкций ряда Тейлора

Все конъюнкции, образующие полином (107), легко пронумеровать. Заметим, что в записях производных некоторые аргументы заменены постоянными c_1, c_2, c_3. При этом наблюдается строгая закономерность: переменные, по которым осуществляется дифференцирование, не заменяются постоянными, т. е. они входят в запись функции в «чистом» виде, а вместо всех остальных аргументов записаны соответствующие постоянные.

Условимся считать, что логические аргументы функции n аргументов упорядочены по алфавиту (либо по их десятичным индексам, например $A_1, A_2, A_3, \ldots$; $c_1, c_2, \ldots$ и т. д.).

Поставим в соответствие аргументу A старший разряд n-разрядного двоичного числа, а n-му аргументу — младший двоичный разряд.

Пусть нуль в записи двоичного числа обозначает, что соответствующий логический аргумент заменён постоянной, тогда единице будет соответствовать случай, когда аргумент в запись функции входит в «чистом» виде.

Обратимся к формуле (107). Первое слагаемое не содержит логических аргументов, все они заменены постоянными. Следовательно, этому выражению соответствует двоичный код 000. В следующем слагаемом незамененной является переменная C — его двоичное представление имеет вид 001 и т. д. до последнего слагаемого, которое обозначается кодом 111.

По двоичному номеру однозначно восстанавливается соответствующая конъюнкция полинома Тейлора. Например, для функции $f(A, B, C)$ по двоичному коду 110 находим следующее:

а) аргумент C заменён постоянной c_3, поскольку ему соответствует нуль в записи числа 110;

б) функция продифференцирована по A и B;

в) коэффициент содержит те же переменные, по которым продифференцирована функция

$$f = (A \oplus c_1)(B \oplus c_2).$$

Таким образом, шестая конъюнкция полинома Тейлора для функции $f(A, B, C)$ имеет вид

$$\varphi_6 = (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A, B, c_3)}{\partial A \partial B},$$

что полностью соответствует выражению (107).

Если функция зависит от четырёх аргументов, то шестая конъюнкция полинома Тейлора определяется аналогичным образом:

а) двоичное число 110 удлиняем до 0110;

б) в записи производной постоянными заменяем аргументы A и D;

в) функцию дифференцируем по переменным B и C;

г) записываем коэффициент с использованием переменных B и C.

В результате получаем:

$$\varphi_6 = (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)\frac{\partial^2 f(c_1, B, C, c_4)}{\partial B \partial C}.$$

Пусть функция $f(A, B, C, D)$ имеет вид

$$f = \overline{A}C + \overline{B}D + BC.$$

Найдём седьмую конъюнкцию полинома Тейлора. Согласно коду 0111 переменной A соответствует нуль, следовательно, коэффициент образуют аргументы B, C, D. Функцию дифференцируем по тем же переменным, а вместо аргумента A записываем постоянную c_1.

Дифференцируем функцию по переменной B:

$$\frac{\partial f(c_1, B, C, D)}{\partial B} = c_1 C\overline{D} + \overline{C}D.$$

Полученное выражение дифференцируем по C:

$$\frac{\partial^2 f(c_1, B, C, D)}{\partial B \partial C} = c_1 + D.$$

Результат дифференцируем по аргументу D:

$$\frac{\partial^3 f(c_1, B, C, D)}{\partial B \partial C \partial D} = \overline{c}_1.$$

В результате получаем:

$$\varphi_7 = (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)(D \oplus c_4)\overline{c}_1.$$

Это выражение имеет 16 вариантов записи в зависимости от набора значений постоянных. Восемь из них равны нулю (когда $c_1 = 1$). Остальные восемь имеют вид:

0000	$\varphi_7 = BCD$;	0100	$\varphi_7 = \overline{B}CD$;
0001	$\varphi_7 = BC\overline{D}$;	0101	$\varphi_7 = \overline{B}C\overline{D}$;
0010	$\varphi_7 = B\overline{C}D$;	0110	$\varphi_7 = \overline{B}\,\overline{C}D$;
0011	$\varphi_7 = B\overline{C}\,\overline{D}$;	0111	$\varphi_7 = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$,

где двоичные четырёхразрядные числа обозначают наборы значений постоянных.

Упражнения

1. Булева функция зависит от шести аргументов A, B, C, D, E, F.

(55Р). Сколько слагаемых имеет разложение в ряд Тейлора этой функции?

(ЦКВ). Запишите двоичный код 48-й конъюнкции ряда Тейлора (нумерация с нуля).

(ХЛТ). Какие аргументы заменены постоянными в 32-й конъюнкции ряда Тейлора?

(ГРУ). По каким переменным продифференцирована функция 42-й конъюнкции ряда Тейлора?

(ТЕФ). Какие аргументы входят в коэффициент 50-й конъюнкции ряда Тейлора?

2. (МОХ). Какой десятичный номер имеет конъюнкция, содержащая в ряду Тейлора коэффициент вида $(B + c_2)(C + c_3)(E + c_5)$, если функция зависит от пяти аргументов?

3. (УУЦ). Сколько конъюнкций входит в ряд Тейлора, в каждой из которых коэффициент содержит три переменных, если функция зависит от 5 аргументов?

4. (004). Функцию f разложили в ряд Тейлора. В этом ряду содержится 5 конъюнкций, в коэффициенты которых входит по одной переменной. Сколько в ряду конъюнкций, содержащих по 3 аргумента?

5. (0ХШ). В ряду Тейлора насчитывается 10 конъюнкций, коэффициенты которых содержат по две переменных. Сколько в ряду конъюнкций, содержащих по 3 аргумента?

6. (МОЩ). Найдите девятую конъюнкцию ряда Тейлора для функции $f = A\overline{B} + \overline{C}D$ на наборе значений постоянных 1000.

7. (ЭХЭ). Найдите 15-ю конъюнкцию ряда Тейлора для функции $f = A\overline{B} + \overline{C}D$ на наборе значений постоянных 1001.

8. (ЯНЯ). Найдите конъюнкцию с номером 0 ряда Тейлора для функции $f = AC\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}D$ на наборе значений постоянных 1011.

9. (0И0). Найдите конъюнкцию с номером 1 ряда Тейлора для функции $f = A + BCD$ на наборе значений постоянных 0111.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А. Логика. Автоматы. Алгоритмы / М.А. Айзерман, Л.А.Гусев, Л.И. Розоноэр, И.М. Смирнова, А.А. Таль. — М.: Физматгиз, 1963. — 556 с.
2. Березина Л.Ю. Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979. — 143 с.
3. Бохманн Д. Двоичные динамические системы / Д. Бохманн, Х. Постхоф. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 400 с.
4. Вавилов Е.Н. Синтез схем электронных цифровых машин / Е.Н. Вавилов, Г.П. Портной. — М.: Сов. радио, 1963. — 440 с.
5. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. — М.: Просвещение, 1976. — 48 с.
6. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1965. — 128 с.
7. Виленкин Н.Я. Математика. — М.: Просвещение, 1977. — 352 с.
8. Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко — М.: Наука, 1977. — 368 с.
9. Гжегорчик А. Популярная логика. — М.: Наука, 1972. — 111 с.
10. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
11. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. — М.: Физматгиз, 1962. — 476 с.
12. Грейнер Г.Р. Проектирование бесконтактных управляющих логических устройств промышленной электроники / Г.Р. Грейнер, В.П. Ильяшенко, В.П. Май, Н.Н. Первушин, Л.И. Токмакова. — М.: Энергия, 1977. — 384 с.
13. Голышев Л.К. Электронные вычислительные машины. — Киев: Гостехиздат УССР, 1963. — 428 с.
14. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. — М.: Высшая школа, 1986. — 311 с.
15. Горелик А.Л. Методы распознавания / А.Л. Горелик В.А Скрипкин. — М.: Высшая школа, 1977. — 224 с.
16. Горский Д.П. Краткий словарь по логике / Д.П. Горский, А.А. Ивин, А.Л. Никифоров. — М.: Просвещение, 1991. — 208 с.
17. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. — М.: Наука, 1977. — 80 с.
18. Ельцов А.А. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных / А.А. Ельцов, Л.И. Магазинников. — Томск: Томская гос. академия систем упр. и радиоэлектроники, 1995. — 189 с.
19. Ершов Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
20. Информатика. Энциклопедический словарь для начинающих / Сост. Д.А. Поспелов. — М.: Педагогика-Пресс, 1994. — 352 с.
21. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств. — М.: Просвещение, 1965. — 267 с.
22. Калужнин Л.А. Преобразования и перестановки / Л.А. Калужнин, В.И. Сущанский. — М.: Наука, 1985. — 160 с.
23. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. — М.: ИЛ, 1962. — 738 с.
24. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. — М.: Наука, 1975. — 720 с.
25. Криницкий Н.А. Автоматизированные информационные системы / Н.А. Криницкий, Г.А. Миронов, Г.Д. Фролов. — М.: Наука, 1982. — 384 с.
26. Криницкий Н.А. Алгоритмы вокруг нас. — М.: Наука, 1984. — 223 с.
27. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 396 с.
28. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. — М.: Учпедгиз, 1955. — 152 с.
29. Левин В.И. Логическая теория надежности сложных систем. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 128 с.
30. Ляпин Е.С. Упражнения по теории групп / Е.С. Ляпин, А.Я. Айзенштат, М.М. Лесохин. — М.: Наука, 1967. — 264 с.
31. Мелихов А.Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А.Н. Мелихов, Л.С. Бернштейн, С.Я. Коровин. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
32. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1971. — 320с.
33. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
34. Никольская И.Л. Математическая логика. — М.: Высшая школа, 1981. — 127 с.
35. Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965. — 174 с.
36. Петер Р. Игра с бесконечностью. — М.: Молодая гвардия, 1967. — 368 с.
37. Погорелов А.В. Геометрия. 6—10. А.В. Погорелов, Ю.В. Пухначев, Ю.П. Попов.— М.: Просвещение, 1984.—287 с.
38. Пухначев Ю. В. Математика без формул / Ю.В. Пухначев, Ю.П. Попов. — М.: Знание, 1979. — 160 с.
39. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика. — М.: Педагогика, 1989. — 352 с.
40. Самофалов К. Электронные вычислительные машины / К.Г. Самофалов, В.И. Корнейчук, В.П. Тарасенко. — Киев: Вища школа, 1976. — 480 с.
41. Смыслова З.А. Математическая логика и ее приложения. — Томск: Томская гос. академия сист. упр. и радиоэлектроники, 1994. — 111 с.
42. Советский энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1985. — 1600 с.
43. Столл Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — 230 с.
44. Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных машин. — Киев: Техника, 1964. — 384 с.
45. Флорин Ж. Синтез логических устройств и его автоматизация. — М.: Мир, 1966. — 376 с.
46. Фор Р. Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. — М.: Мир, 1966. — 271 с.
47. Фудзисава Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. — М.: Радио и связь, 1984. — 240 с.
48. Шевелев Ю.П. Булева алгебра и логика поиска семантической информации / Ю.П. Шевелев, Ю.М. Костырин, Б.С. Рябышкин, А.В. Бриганец. — Томск: Изд-во Томского университета, 1975. — 182 с.
49. Широкова П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. — М.: Наука, 1983. — 78 с.
50. Энциклопедия кибернетики. Т. 1. — Киев: Глав. ред. украинской сов. энциклопедии, 1975. — 607 с.
51. Энциклопедия кибернетики. Т. 2. — Киев: Глав. ред. украинской сов. энциклопедии, 1975. — 624 с.
52. Яглом И.Н. Необыкновенная алгебра. — М.: Наука, 1968. — 71 с.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ